

Cours préparatoires au master en sciences informatiques

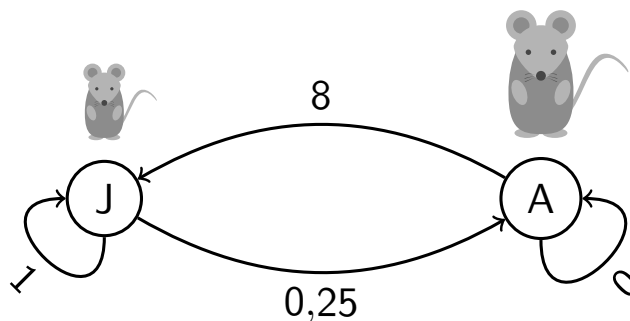
Systèmes dynamiques linéaires

Stéphanie Guérit
École polytechnique de Louvain (UCLouvain)

12 septembre 2023

1 / 8

Systèmes dynamiques linéaires et diagonalisation

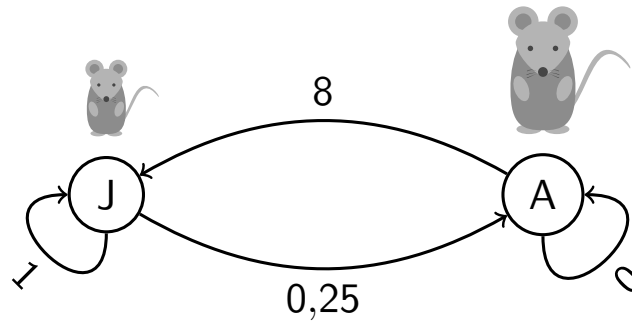


Population de souris femelles :

- **juvéniles** (entre 0 et 1 an) : donnent naissance à une femelle en moyenne ;
- **adultes** (entre 1 et 2 ans) : donnent naissance à 8 femelles en moyenne ;
- seules 25% des juvéniles survivent à la première année ;
- aucune femelle ne survit au-delà de la deuxième année.

2 / 8

Systèmes dynamiques linéaires et diagonalisation

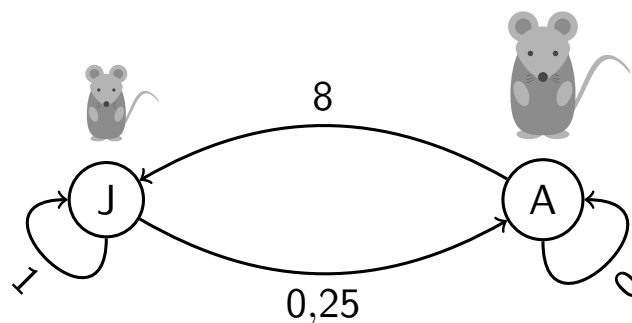


La population de juvéniles et d'adultes l'année k est

$$\begin{cases} j_k &= j_{k-1} + 8a_{k-1} \\ a_k &= 0,25j_{k-1}. \end{cases}$$

2/8

Systèmes dynamiques linéaires et diagonalisation

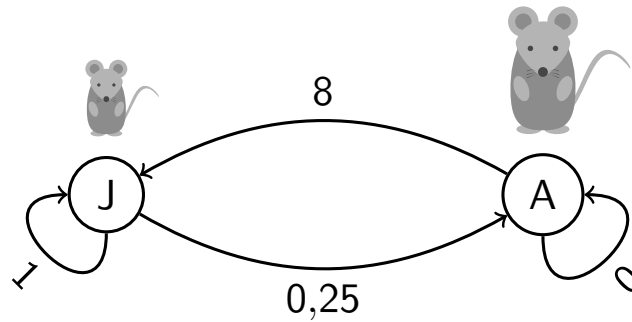


La population de juvéniles et d'adultes l'année k est

$$\begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{k-1} \\ a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

2/8

Systèmes dynamiques linéaires et diagonalisation

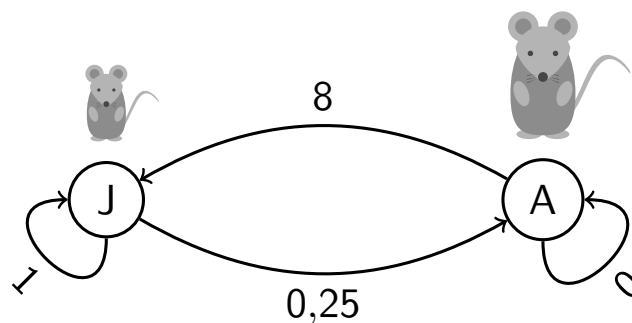


La population de juvéniles et d'adultes l'année k est

$$\begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{k-2} \\ a_{k-2} \end{pmatrix}.$$

2/8

Systèmes dynamiques linéaires et diagonalisation



La population de juvéniles et d'adultes l'année k est

$$\underbrace{\begin{pmatrix} j_k \\ a_k \end{pmatrix}}_{\text{vecteur d'état}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}^k}_{\text{calcul efficace ?}} \underbrace{\begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}}_{\text{population initiale}}.$$

2/8



Pause (5 min)

3 / 8

Application 3 : modèle SIR

Implémentons un modèle d'évolution d'une épidémie dans une population...



... rendez-vous sur Moodle pour télécharger le notebook jupyter
2023_09_12_modele_SIR.

4 / 8

Dynamique d'une épidémie : le modèle SIR

Le vecteur d'état donne les proportions de la population dans chacun des états suivants :

- *Susceptible*
- *Infected*
- *Recovered* (and immune)
- *Deceased*

La somme des composantes du vecteur d'état vaut 1.

5 / 8

Dynamique d'une épidémie : les données

Chaque jour,

- parmi la population S, 5% tombent malades et 95% restent S ;
- parmi la population I, 1% meurt, 10% guérissent et deviennent R, 4% guérissent et redeviennent S et 85% restent infectés ;
- 100% des personnes R et des personnes décédées restent dans leur état.

Grappe ?

Quelles sont les équations de ce système dynamique ? Et sous forme matricielle, en fonction du vecteur d'état initial ?

6 / 8

Application 3 : modèle SIR




Objectif 1 : afficher l'évolution de l'épidémie pour les 365 jours suivant l'état initial où 100% de la population est S.



Objectif 2 : comparer le temps de calcul pour résoudre ce système de manière récursive et avec diagonalisation de la matrice.

7 / 8

Le programme de cette semaine...

- Jeudi 7 septembre : introduction au calcul matriciel 
application 1 : systèmes d'équations linéaires
- Lundi 11 septembre : norme et distance 
application 2 : clustering (implémentation de l'algorithme k -means)
- Mardi 12 septembre : application 3 : systèmes dynamiques linéaires (implémentation du modèle SIR)
- Mercr. 13 septembre : méthode des moindres carrés 
application 4 : classification (2 classes)

8 / 8