Cours préparatoires au master en sciences informatiques

Analyse multivariée : fonctions

Pierre-Yves Gousenbourger
École polytechnique de Louvain (UCLouvain)

05 septembre 2023

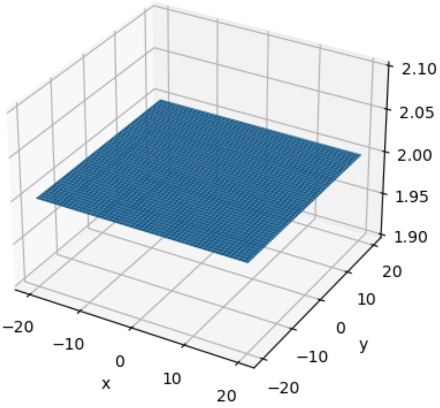
Ce mercredi 7 septembre

Une fonction peut-elle dépendre de plusieurs paramètres et comment l'analyser ?

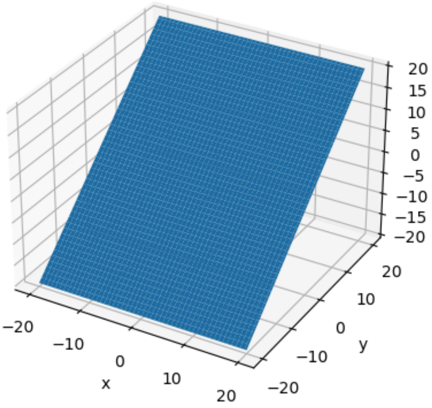
Découverte des fonctions multivariées (15 min)

Rendez-vous sur Moodle pour télécharger le notebook jupyter `2023_09_05_fonctions_multivariees_01`.

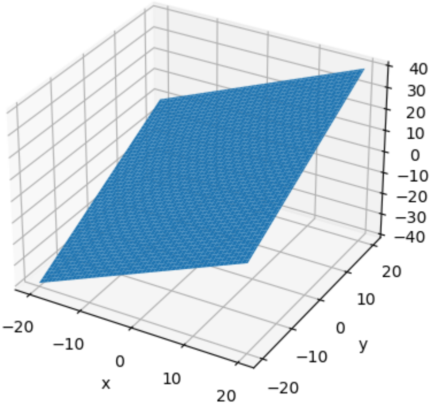
Quelques fonctions à deux variables



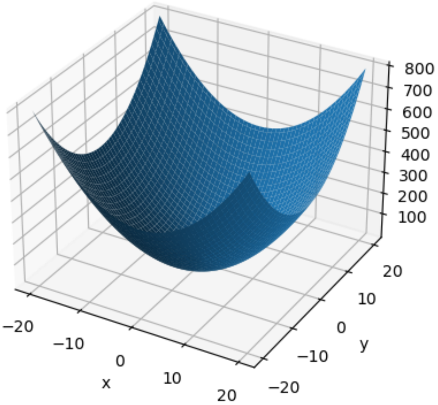
Quelques fonctions à deux variables



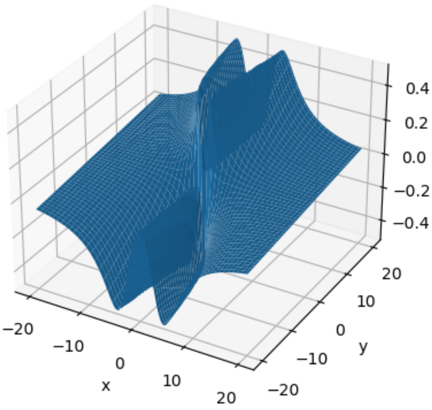
Quelques fonctions à deux variables



Quelques fonctions à deux variables



Quelques fonctions à deux variables

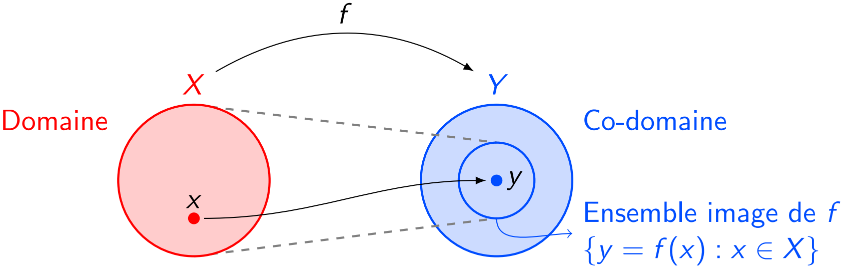


Concept de fonction

Définition (Fonction)

Une **fonction** *scalaire univariée f d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}$ dans un ensemble $Y \subseteq \mathbb{R}$ est une loi qui, à chaque élément de X, associe un et un seul élément de Y. On note*

$$f : X \to Y : x \mapsto y.$$

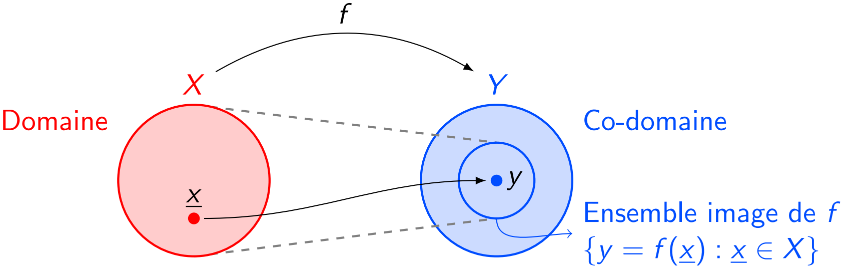


Concept de fonction

Définition (Fonction)

Une **fonction** *scalaire multivariée f d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dans un ensemble $Y \subseteq \mathbb{R}$ est une loi qui, à chaque élément de X, associe un et un seul élément de Y. On note*

$$f : X \to Y : \underline{x} \mapsto y.$$

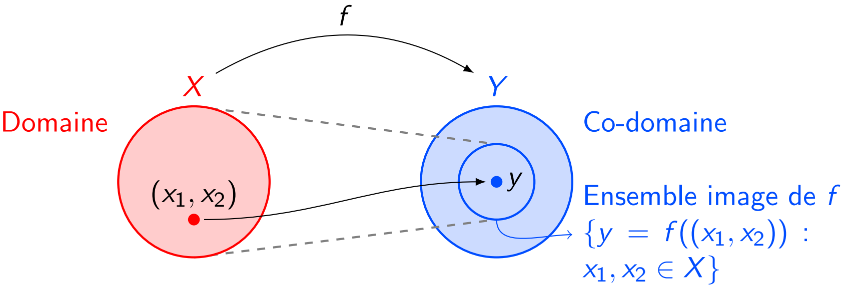


Concept de fonction (c'est... la... même... chose !)

Définition (Fonction)

Une **fonction** *scalaire bivariée f d'un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^2$ dans un ensemble $Y \subseteq \mathbb{R}$ est une loi qui, à chaque élément de X, associe un et un seul élément de Y. On note*

$$f : X \to Y : (x_1, x_2) \mapsto y.$$



Le graphe d'une fonction

À chaque fonction, on peut associer un graphe.

Définition (Graphe)

Le **graphe** *d'une fonction scalaire* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ *est l'ensemble des paires* $(\underline{x}, f(\underline{x}))$ *atteintes à partir de* X. *On le note:*

$$\text{graph } f := \{(\underline{x}, f(\underline{x})) \text{ t.q. } \underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

Le graphe d'une fonction

À chaque fonction, on peut associer un graphe.

Définition (Graphe)

Le **graphe** *d'une fonction scalaire* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ *est l'ensemble des paires* $(\underline{x}, f(\underline{x}))$ *atteintes à partir de* X*. On le note:*

$$\textit{graph } f := \{(\underline{x}, f(\underline{x})) \textit{ t.q. } \underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

Les graphes de fonctions scalaires sont représentés dans un espace $n+1$, sur un *repère orthonormé* de $\mathbb{R}^{n+1}$, où le vecteur e_{n+1} sert de base aux réalisations $f(\underline{x})$ associées à $\underline{x} \in X$.

L'image d'une fonction

Les réalisations $f(\underline{x})$ de $\underline{x} \in X$ définissent *l'espace image* de la fonction f.

Définition (Image d'une fonction)

*L'***image** *d'une fonction scalaire* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$ *est l'ensemble des valeurs atteintes par* f *sur* X*. On le note:*

$$Im\ f := \{y = f(\underline{x})\ t.q.\ \underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}.$$

Les courbes de niveau (I)

Une autre manière de représenter une fonction consiste à ne représenter que les positions du domaine où la fonction atteint une valeur donnée. On appelle cela une courbe (ou un ensemble) de niveau k.

Les courbes de niveau (I)

Une autre manière de représenter une fonction consiste à ne représenter que les positions du domaine où la fonction atteint une valeur donnée. On appelle cela une courbe (ou un ensemble) de niveau k.

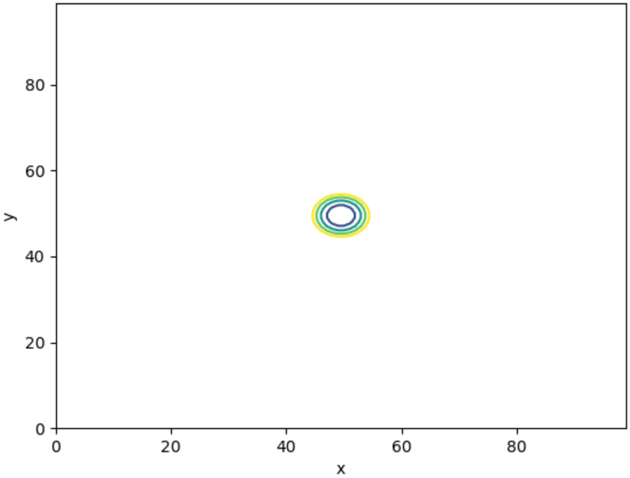
Définition (Ensemble de niveau k)

L'ensemble de niveau k d'une fonction scalaire $f : X \subseteq R^n \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de X tel que $f(\underline{x}) = k$:

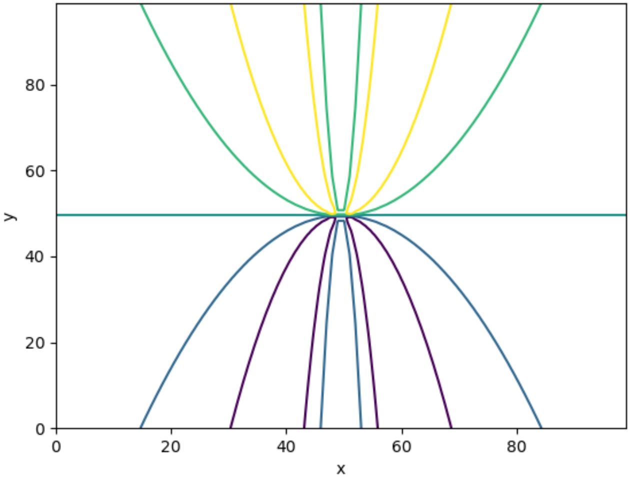
$$C_k^f = \{\underline{x} \in X \ t.q \ f(\underline{x}) = k\}.$$

Cette solution est très utile pour cartographier la Terre et son altitude sur un dessin en deux dimensions.

Les courbes de niveau (II)



Les courbes de niveau (II)



La restriction

Définition (Restriction d'une fonction)

La **restriction** *d'une fonction à un* **paramétrage** $\underline{x}(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to X \subseteq \mathbb{R}^n$ *est la réalisation de* f *par* $\underline{x}(t)$*:*

$$\bar{f}(t) = f(\underline{x}(t)), \ \underline{x}(t) \in X.$$

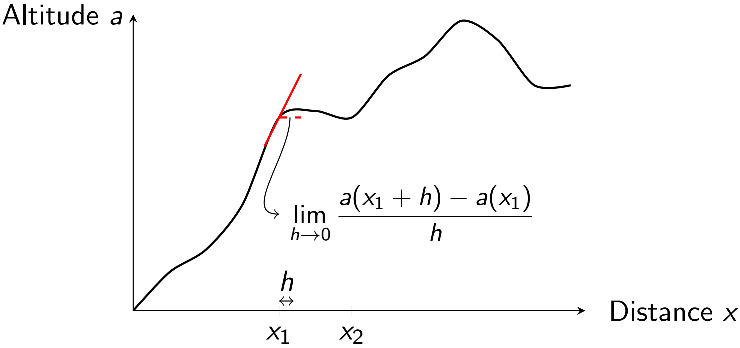
Par exemple, la restriction de $f(x, y) = \sin(x + y)$ par $t \mapsto (x(t), y(t)) = (t, -t)$ est $\bar{f}(t) = 0$, $\forall t$.

Jouons avec des fonctions multivariées

Rendez-vous sur Moodle pour télécharger le notebook jupyter `2023_09_05_fonctions_multivariees_02`.

Randonnée en montagne (rappel)

Le taux **instantané** de variation est obtenu lorsque $h \to 0$.
Il correspond à la **pente** de la droite tangente au graphe en x_1.



Dérivées directionnelles (I)

Définition (Fonction dérivée de f)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A. Si f est dérivable en tous les points de son domaine, on dit que f est dérivable et on définit la **fonction dérivée**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

qui associe à x son nombre dérivé.

La dérivée d'ordre n d'une fonction est notée $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$.

Dérivées directionnelles (I)

Définition (Fonction dérivée de f)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A. Si f est dérivable en tous les points de son domaine, on dit que f est dérivable et on définit la **fonction dérivée**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

qui associe à x son nombre dérivé.

La dérivée d'ordre n d'une fonction est notée $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$.

La **dérivée** d'une fonction $f(x)$ donne une idée de **l'accroissement** de f **dans la direction** x, lorsqu'on avance de h.

Dérivées directionnelles (II)

Une **direction** est un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ de norme unitaire. Il permet de généraliser l'idée de dérivée univariée.

Définition (Dérivée directionnelle de f)

Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction multivariée, a, un point de l'intérieur de A et $d \in \mathbb{R}^n$, une direction. La dérivée directionnelle de f en a dans la direction d est donnée par

$$D_d f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + td) - f(a)}{t}.$$

La dérivée d'une restriction univariée

Pour que la définition soit totalement correcte, il faut vérifier que f soit dérivable partout sur A restreint à la droite de direction d et passant par a.

Proposition

Soit $f_{D_{a,d}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f_{D_{a,d}}(t)$*, cette restriction. Alors on remarque que*

$$D_d f(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{D_{a,d}}(0).$$

(Prouvez-le, c'est un bon exercice !)

La dérivée d'une restriction univariée

Pour que la définition soit totalement correcte, il faut vérifier que f soit dérivable partout sur A restreint à la droite de direction d et passant par a.

Proposition

Soit $f_{D_{a,d}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto f_{D_{a,d}}(t)$, cette restriction. Alors on remarque que

$$D_d f(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{D_{a,d}}(0).$$

(Prouvez-le, c'est un bon exercice !)
Bref, $D_d f(a)$ est la **pente de f** en a en suivant la direction d.

Propriétés des dérivées

Toutes les propriétés élémentaires des dérivées univariées sont inchangées.
(les maths, c'est facile !)

Définition

Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* a*, un point de l'intérieur de* A*. Soit* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, la décomposition de sa variable dans la base canonique* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*. La dérivée partielle de* f *selon sa variable* x_i *au point* a *est*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Dérivées partielles (I)

Définition

Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* a*, un point de l'intérieur de* A*. Soit* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, la décomposition de sa variable dans la base canonique* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*. La dérivée partielle de* f *selon sa variable* x_i *au point* a *est*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

Remarque: la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est une dérivée directionnelle particulière : $D_{e_i} f(a)$.

Dérivées partielles (II)

Une dérivée partielle est une dérivée univariée (pourquoi ?).

Dérivées partielles (II)

Une dérivée partielle est une dérivée univariée (pourquoi ?).

Il suffit de "geler" les autres variables (pourquoi ?).

Dérivées partielles (II)

Une dérivée partielle est une dérivée univariée (pourquoi ?).

Il suffit de “geler” les autres variables (pourquoi ?).

Toutes les règles de dérivation restent applicables.

Dérivées partielles (II)

Une dérivée partielle est une dérivée univariée (pourquoi ?).

Il suffit de “geler” les autres variables (pourquoi ?).

Toutes les règles de dérivation restent applicables.

Le gradient

La généralisation de la dérivée univariée s'appelle le gradient.

Définition

Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $a \in A$. *Le gradient de* f *en* a *est noté* $\nabla f(a)$ *et est un vecteur composé des dérivées partielles de* f *:*

$$\nabla f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}^\top .$$

Le gradient

La généralisation de la dérivée univariée s'appelle le gradient.

Définition

Soit $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $a \in A$. *Le gradient de* f *en* a *est noté* $\nabla f(a)$ *et est un vecteur composé des dérivées partielles de* f *:*

$$\nabla f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}^\top .$$

Le gradient donne la direction de plus grande pente d'une fonction. L'annuler permet de déterminer un candidat extremum dans un problème d'optimisation.

On s'entraîne un peu ?

Quelques exercices (I)

Calculer les dérivées partielles de fonctions ci-dessous aux différents points de leur domaine naturel :

1. $f(x, y) = \sin(3xy) + e^{-2x^2 y} + 2x^3$
2. $f(x, y) = (x + y)^{-\frac{1}{2}}$
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
4. $g(x, y) = x\cos(y) + y$
5. $g(x, y) = \cos^3(5x - y^3) + \ln(3\ln(xy))$
6. $h(x, y) = \arctan(y\sqrt{x}) + sin^2(3x^2 + xy - 5y^3)$

Quelques exercices (II)

Calculer le gradient des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x + 3y^2$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
3. $f(x, y) = \dfrac{4y}{(x^2 + 1)}$
4. $g(x, y) = 3x^2\sqrt{y}$