Cours préparatoires au master en sciences informatiques

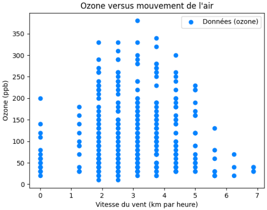
Analyse univariée : fonctions

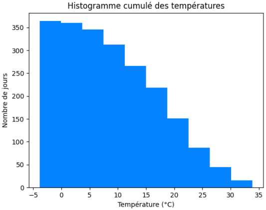
Pierre-Yves Gousenbourger
École polytechnique de Louvain (UCLouvain)
Slides authentiques : Stéphanie Guérit

4 septembre 2023

Avec Dimitri. . .

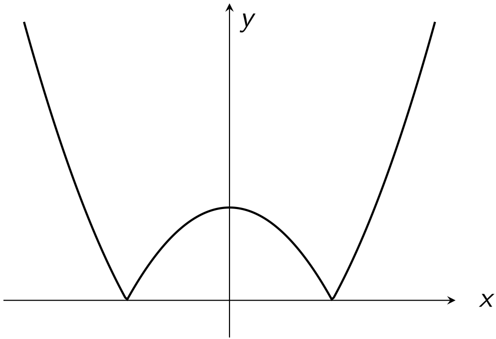
Visualisation de données à l'aide de graphes... de fonctions ?





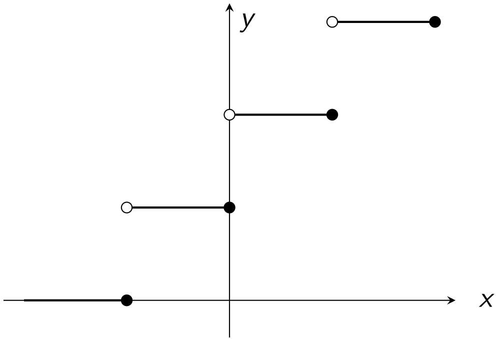
Est-ce une fonction ?

Le graphe ci-dessous représente-t-il une fonction ?



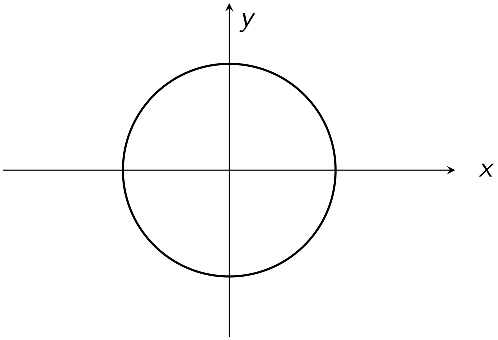
Est-ce une fonction ?

Le graphe ci-dessous représente-t-il une fonction ?



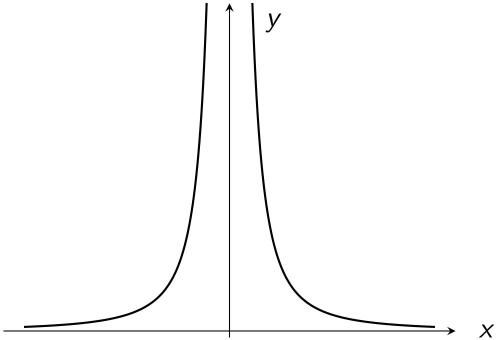
Est-ce une fonction ?

Le graphe ci-dessous représente-t-il une fonction ?



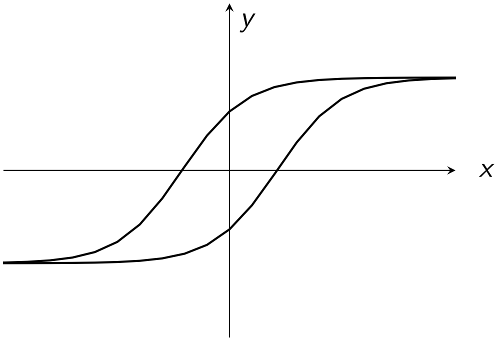
Est-ce une fonction ?

Le graphe ci-dessous représente-t-il une fonction ?



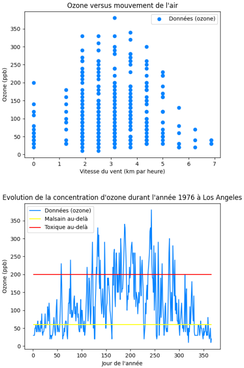
Est-ce une fonction ?

Le graphe ci-dessous représente-t-il une fonction ?



Est-ce une fonction ?

Les graphes ci-dessous représentent-t-ils des fonctions ?



Concept de fonction

Définition (Fonction)

Une **fonction** f *d'un ensemble* X *dans un ensemble* Y *est une loi qui, à chaque élément de* X, *associe un et un seul élément de* Y.
On note

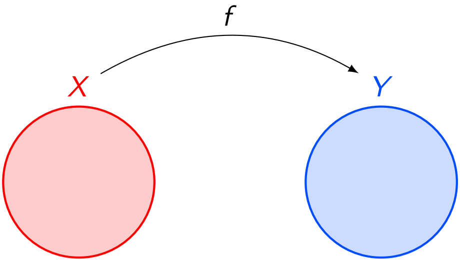
$$f : X \to Y : x \mapsto y.$$

Concept de fonction

Définition (Fonction)

Une **fonction** *f d'un ensemble X dans un ensemble Y est une loi qui, à chaque élément de X, associe un et un seul élément de Y. On note*

$$f : X \to Y : x \mapsto y.$$

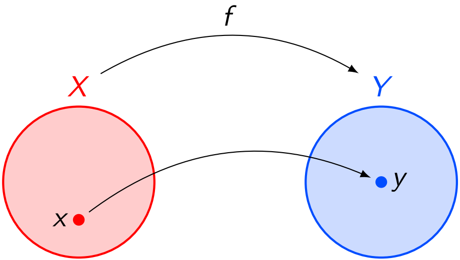


Concept de fonction

Définition (Fonction)

Une **fonction** *f d'un ensemble X dans un ensemble Y est une loi qui, à chaque élément de X, associe un et un seul élément de Y.*
On note

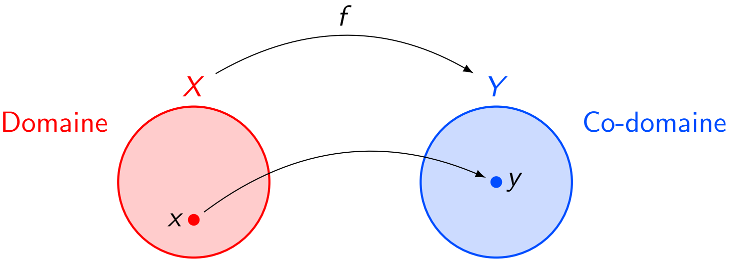
$$f : X \to Y : x \mapsto y.$$



Définition (Fonction)

Une **fonction** f *d'un ensemble* X *dans un ensemble* Y *est une loi qui, à chaque élément de* X, *associe un et un seul élément de* Y. *On note*

$$f : X \to Y : x \mapsto y.$$

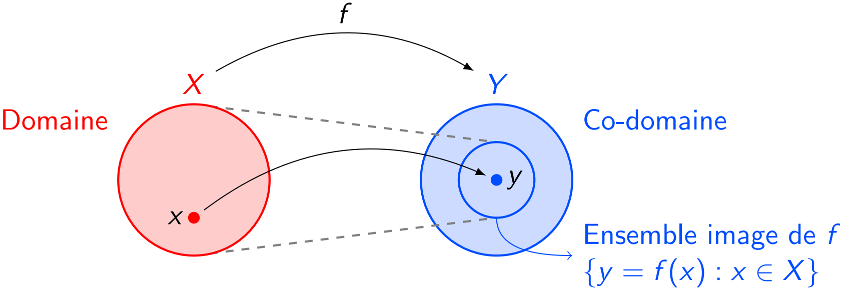


Concept de fonction

Définition (Fonction)

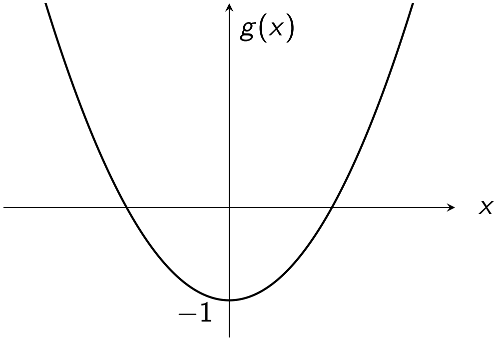
Une **fonction** *f d'un ensemble X dans un ensemble Y est une loi qui, à chaque élément de X, associe un et un seul élément de Y.*
On note

$$f : X \to Y : x \mapsto y.$$

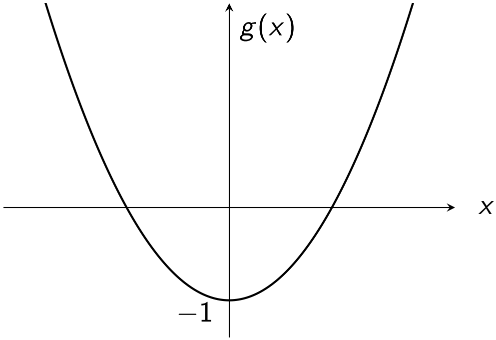


Domaine, co-domaine et ensemble image

Quels sont les domaines, co-domaines et ensemble image de la fonction suivante ?

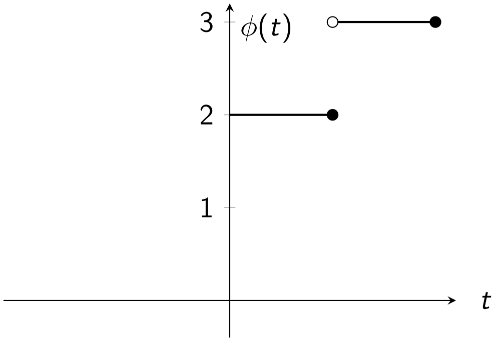


Quels sont les domaines, co-domaines et ensemble image de la fonction suivante ?



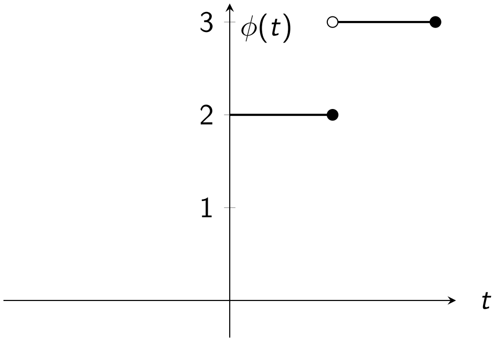
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Quels sont les domaines, co-domaines et ensemble image de la fonction suivante ?



Domaine, co-domaine et ensemble image

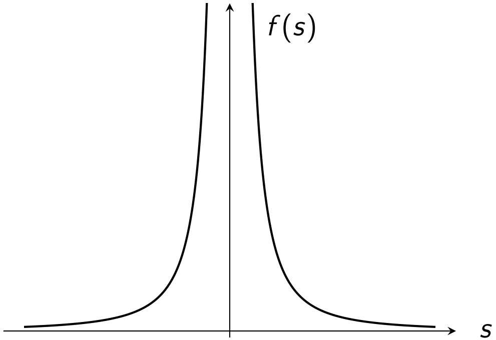
Quels sont les domaines, co-domaines et ensemble image de la fonction suivante ?



$$\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{N}$$

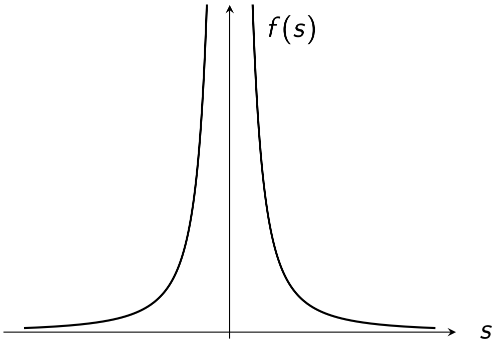
Domaine, co-domaine et ensemble image

Quels sont les domaines, co-domaines et ensemble image
de la fonction suivante ?



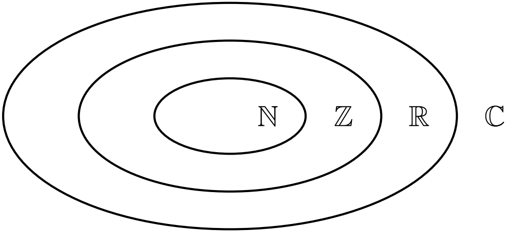
Domaine, co-domaine et ensemble image

Quels sont les domaines, co-domaines et ensemble image de la fonction suivante ?

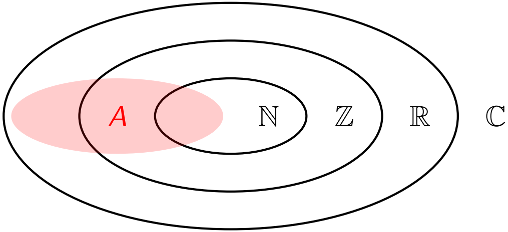


$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$$

Ensembles usuels

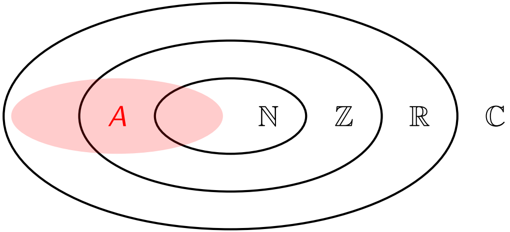


Ensembles usuels



Parfois, on considère un sous-ensemble A :

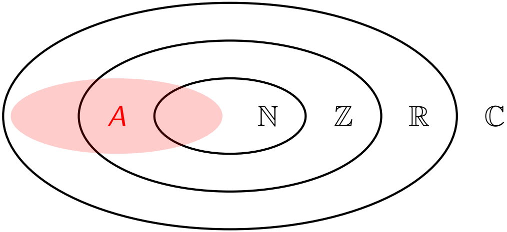
Ensembles usuels



Parfois, on considère un sous-ensemble A :

- **Restriction** aux éléments positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_+$

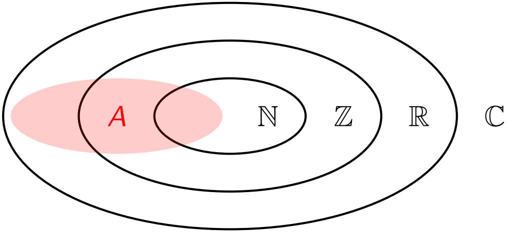
Ensembles usuels



Parfois, on considère un sous-ensemble A :

- **Restriction** aux éléments positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_+$
- Restriction aux éléments strictement positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_-^*$

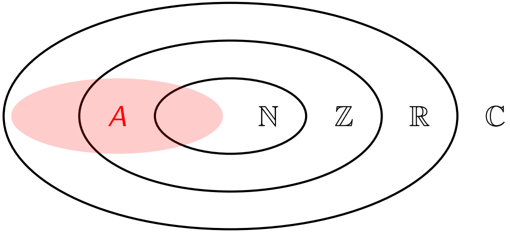
Ensembles usuels



Parfois, on considère un sous-ensemble A :

- **Restriction** aux éléments positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_+$
- Restriction aux éléments strictement positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_-^*$
- **Différence** d'ensembles, *e.g.*, $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ ou $A = \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$

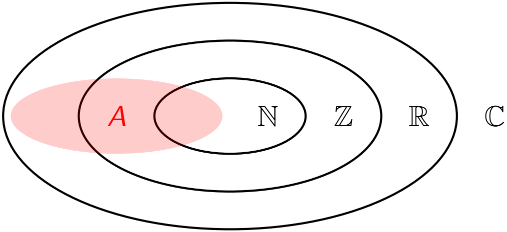
Ensembles usuels



Parfois, on considère un sous-ensemble A :

- **Restriction** aux éléments positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_+$
- Restriction aux éléments strictement positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_-^*$
- **Différence** d'ensembles, *e.g.*, $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ ou $A = \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$
- **Union** d'ensembles, *e.g.*, $A = \left]-\infty, 2\right[\cup \left]3, 4\right]$

Ensembles usuels



Parfois, on considère un sous-ensemble A :

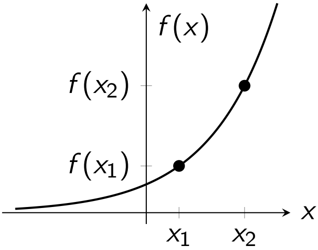
- **Restriction** aux éléments positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_+$
- Restriction aux éléments strictement positifs/négatifs, *e.g.*, $A = \mathbb{R}_-^*$
- **Différence** d'ensembles, *e.g.*, $A = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ ou $A = \mathbb{R} \setminus [-1, 3]$
- **Union** d'ensembles, *e.g.*, $A =]-\infty, 2[\cup]3, 4]$

✎ Exercices 1.1(a) et 1.1(b)

Définition (Fonction monotone croissante)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est **monotone croissante** *si pour tout $x_1, x_2 \in A$ avec $x_1 < x_2$, on a*

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

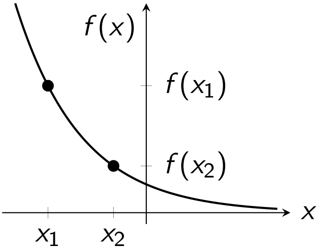


Propriétés des fonctions

Définition (Fonction monotone décroissante)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est **monotone décroissante** *si pour tout $x_1, x_2 \in A$ avec $x_1 < x_2$, on a*

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

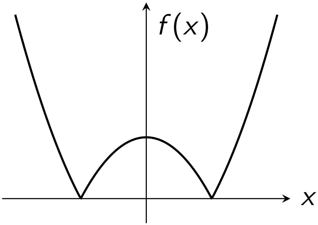


Propriétés des fonctions

Définition (Fonction paire)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est **paire** *si pour tout $x \in A$, on a $-x \in A$ et*

$$f(-x) = f(x).$$

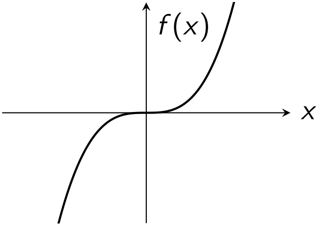


Propriétés des fonctions

Définition (Fonction impaire)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est **impaire** *si pour tout $x \in A$, on a $-x \in A$ et*

$$f(-x) = -f(x).$$

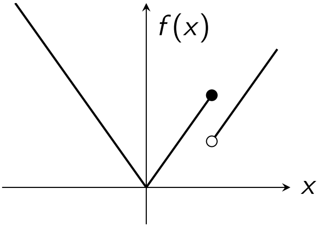


Propriétés des fonctions

Définition (Fonction continue)

Intuitivement, une fonction **continue** *est une fonction dont le graphe peut être dessiné "sans lever le crayon du papier"(sur le domaine de la fonction).*

Exemple de fonction **discontinue** dont le domaine est $\mathbb{R}$:

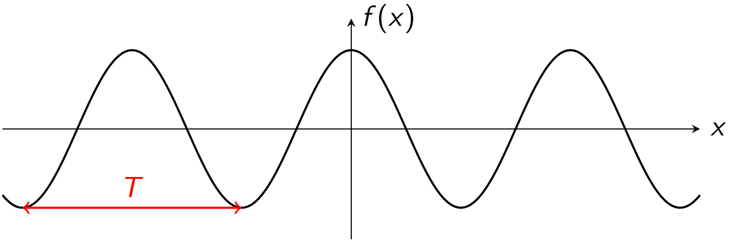


Définition (Fonction périodique)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est **périodique** *s'il existe une valeur $T > 0$ pour laquelle*

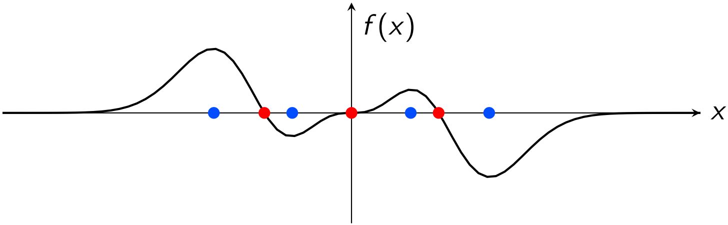
$$f(x) = f(x + T)$$

pour tous les x appartenant au domaine de f.



Propriétés des fonctions

Valeurs remarquables d'une fonction : les racines et les extrémants.



Les racines de f sont les valeurs $x \in \text{dom} f$ telles que $f(x) = 0$.

Les extrémants de f sont les valeurs $x \in \text{dom} f$ telles que $f(x)$ est soit un minimum/maximum global soit un min./max. local.

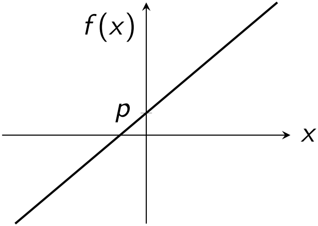
✎ Exercice 1.2

Pause (15 min)

Sommaire

Fonction affine

$$f(x) = mx + p \qquad (m, p \in \mathbb{R})$$



Ensemble image : $\mathbb{R}$

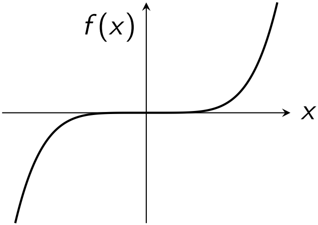
Domaine : $\mathbb{R}$

Propriétés :

- Monotone (croissante ou décroissante selon m)
- Linéaire si $p = 0$

Fonction puissance

$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{R})$$



$n = 5$

Ensemble image : $\mathbb{R}$

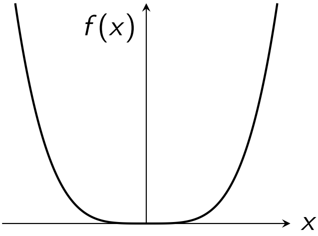
Domaine : $\mathbb{R}$

Propriétés :

- Monotone si $n \in \mathbb{N}^*$ et n impair

Fonction puissance

$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{R})$$



$n = 4$

Ensemble image : $\mathbb{R}_+$

Domaine : $\mathbb{R}$

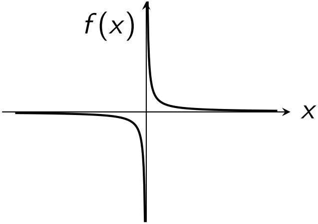
Propriétés :

- Monotone si $n \in \mathbb{N}^*$ et n impair
- Positive si $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair

Famille 2 : fonctions puissance

Fonction puissance

$$f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{R})$$



$n = -1$

Ensemble image : $\mathbb{R}^*$

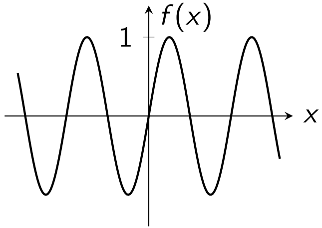
Domaine : $\mathbb{R}^*$

Propriétés :

- Monotone si $n \in \mathbb{N}^*$ et n impair
- Positive si $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair

Fonction sinus

$$f(x) = \sin x$$



Ens. image : $[-1, 1]$

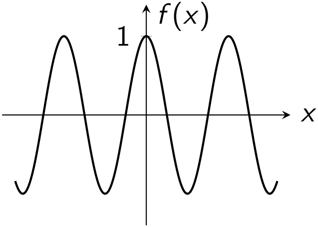
Domaine : $\mathbb{R}$

Propriétés :

- Périodique ($T = 2\pi$)
- Bornée
- Impaire
- Racines en πk, $k \in \mathbb{Z}$

Fonction cosinus

$$f(x) = \cos x$$



Ens. image : $[-1, 1]$

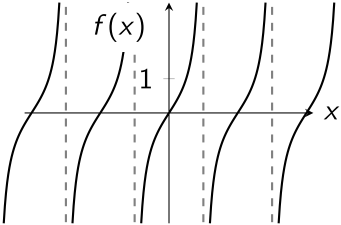
Domaine : $\mathbb{R}$

Propriétés :

- Périodique ($T = 2\pi$)
- Bornée
- Paire
- Racines en $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

Fonction tangente

$$f(x) = \tan x$$



Ensemble image : $\mathbb{R}$

Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}$

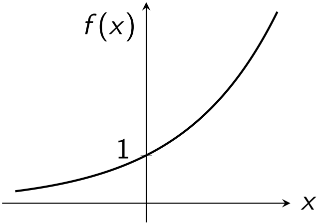
Propriétés :

- Périodique ($T = 2\pi$)
- Impaire
- Racines en πk, $k \in \mathbb{Z}$

Famille 4 : fonctions exponentielles

Fonction exponentielle

$$f(x) = a^x \qquad (a \in \mathbb{R}_+)$$



$a > 1$

Ensemble image : $\mathbb{R}_+^*$

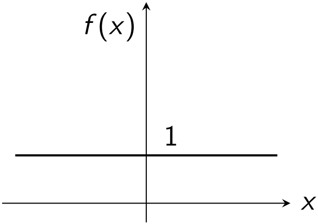
Domaine : $\mathbb{R}$

Propriétés :

- Monotone
- Strictement positive (pas de racine)
- Passe par $(0, 1)$ peu importe a

Fonction exponentielle

$$f(x) = a^x \qquad (a \in \mathbb{R}_+)$$



$a = 1$

Ensemble image : $\mathbb{R}_+^*$

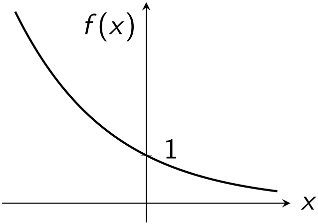
Domaine : $\mathbb{R}$

Propriétés :

- Monotone
- Strictement positive (pas de racine)
- Passe par $(0, 1)$ peu importe a

Fonction exponentielle

$$f(x) = a^x \qquad (a \in \mathbb{R}_+)$$



$0 < a < 1$

Ensemble image : $\mathbb{R}_+^*$

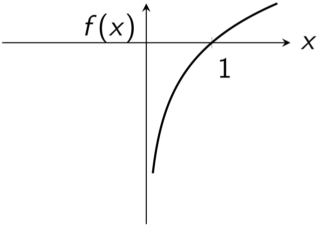
Domaine : $\mathbb{R}$

Propriétés :

- Monotone
- Strictement positive (pas de racine)
- Passe par $(0, 1)$ peu importe a

Fonction logarithme

$$f(x) = \log_a x \qquad (a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$$



Ensemble image : $\mathbb{R}$

Domaine : $\mathbb{R}_+^*$

Propriétés :

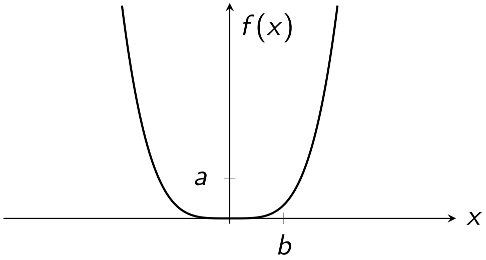
- Monotone croissante
- Passe par $(1, 0)$ (racine unique)

Fonctions élémentaires : récapitulatif

	$f(x)$	Monotonie	Parité	Périodicité
Fonction affine	$mx + p$	$\checkmark$	($\checkmark$ $p = 0$)	
Fonction puissance	x^n	($\checkmark$ n impair)	$\checkmark$	
Fonctions trigonométriques				
Sinus	$\sin x$		$\checkmark$	$\checkmark$
Cosinus	$\cos x$		$\checkmark$	$\checkmark$
Tangente	$\tan x$		$\checkmark$	$\checkmark$
Fonction exponentielle	a^x	$\checkmark$		
Fonction logarithme	$\log_a x$	$\checkmark$		

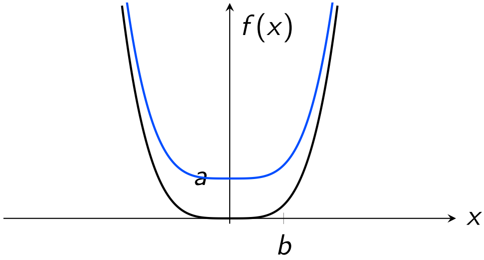
Manipulation basique des fonctions...

Deux manipulations basiques : la **translation** et la **dilatation**



Manipulation basique des fonctions...

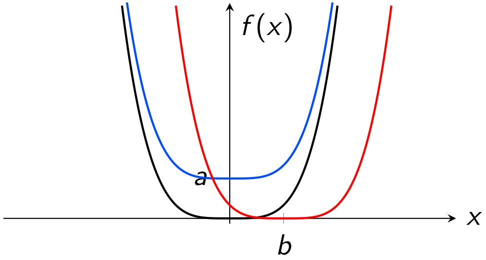
Deux manipulations basiques : la **translation** et la **dilatation**



- Translation selon y : $f(x) + a$

Manipulation basique des fonctions...

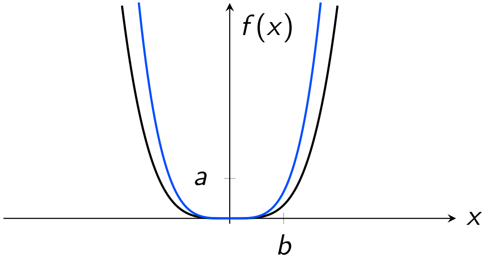
Deux manipulations basiques : la **translation** et la **dilatation**



- Translation selon y : $f(x) + a$
- Translation selon x : $f(x - b)$

Manipulation basique des fonctions...

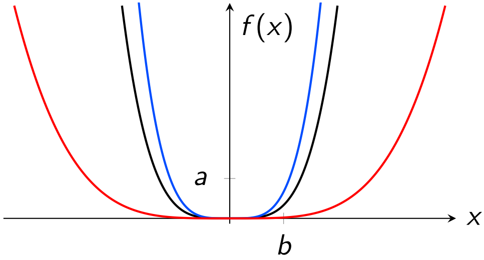
Deux manipulations basiques : la **translation** et la **dilatation**



- Dilatation selon y : $cf(x)$

Manipulation basique des fonctions...

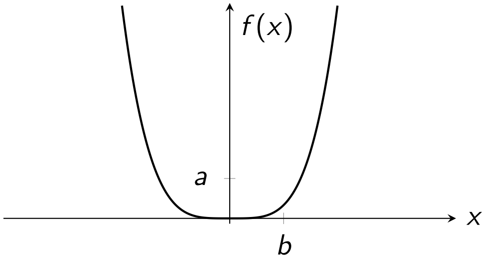
Deux manipulations basiques : la **translation** et la **dilatation**



- Dilatation selon y : $cf(x)$
- Dilatation selon x : $f(x/d)$

Manipulation basique des fonctions...

Deux manipulations basiques : la **translation** et la **dilatation**



✎ Exercice 1.4

... plus généralement : composition de fonctions

Définition (Fonction composée)

Soit $g : X \to A$ et $f : A \to Y$ deux fonctions. La **fonction composée** *de f et g est la fonction $f \circ g : X \to Y$ définie par*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

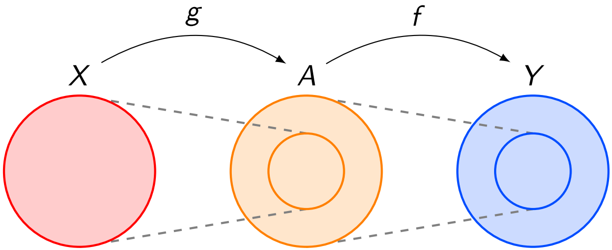
On évalue d'abord g et ensuite f.

Définition (Fonction composée)

Soit $g : X \to A$ et $f : A \to Y$ deux fonctions. La **fonction composée** *de f et g est la fonction $f \circ g : X \to Y$ définie par*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

On évalue d'abord g et ensuite f.



... plus généralement : composition de fonctions

Définition (Fonction composée)

Soit $g : X \to A$ *et* $f : A \to Y$ *deux fonctions. La* **fonction composée** *de* f *et* g *est la fonction* $f \circ g : X \to Y$ *définie par*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

On évalue d'abord g *et ensuite* f.

✎ Exercice 1.6

Entraînement sur INGInious

Choisir 10 exercices à réaliser avant la séance du 07/09

`https://inginious.org/course/prepa-master`

Sommaire