Module 0

Fondements

0.1 Ensembles

Exercice 0.1 Faire une représentation graphique de $A \subset B$, $A \cup B$ et $A \cap B$.

Exercice 0.2* Considérons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 = 16\} \\ B &:= \{p \in \mathbb{N};\ \ p \text{ est premier}\} \end{aligned}$$

Donner un sous-ensemble de A et un sous-ensemble de B.

Exercice 0.3 Soient $A := \{x \in \mathbb{N},\ \ x \leq 12\}$ et $B := \{x \in \mathbb{N};\ \ x \leq 14\}$. Donner $A \cup B$ et $A \cap B$.

Exercice 0.4* Soient A, B, C trois ensembles. Montrer graphiquement, et démontrer, que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

0.2 Quantificateurs

Exercice 0.5* [1] Formaliser les énoncés suivants.

a) Il existe un nombre entier plus petit ou égal à tous les autres.

b) L'ensemble des nombres entiers (im)pairs.

c) N'importe quel nombre entier pair est la somme de deux nombres entiers impairs.

Exercice 0.6* [1] Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des entiers pairs. Donner un sens aux énoncés suivants.

a) $\forall x, y \in \mathbb{P} \Rightarrow (x + y) \in \mathbb{P}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n \in \mathbb{P}$.

Exercice 0.7 Réécrire la définition d'un sous-ensemble en utilisant les quantificateurs.

0.3 Preuves

Exercice 0.8* [1] En raisonnant par récurrence, démontrer les propositions suivantes.

a) Pour tout naturel n, le naturel $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

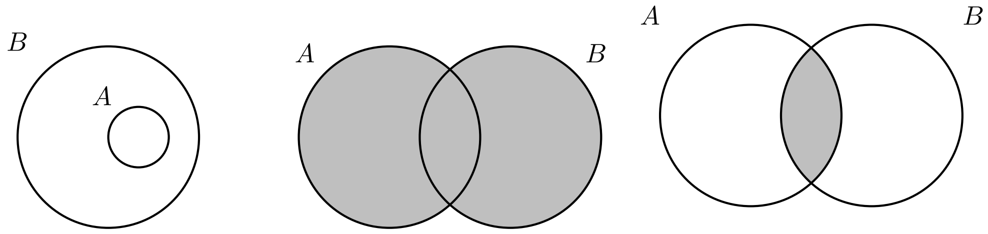
$\star$ b) La somme $\mathcal{S}_n$ des n premiers entiers est donnée par $\mathcal{S}_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$\star$ c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'entier $(n^3 - n)$ est divisible par 3.

Solutions du module 0

Fondements

Solution 0.1



(a) $A \subset B$. **(b)** $A \cup B$. **(c)** $A \cap B$.

Solution 0.2 Fait en séance.

Solution 0.3 $A \cup B = B$, et $A \cap B = A$.

Solution 0.4 Fait en séance.

Solution 0.5 Fait en séance.

Solution 0.6 Fait en séance.

Solution 0.7 $A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A : a \in B$

Solution 0.8 Fait en séance.

Références

[1] S. Dynerowicz et F. Cammarata, [LSINC1103] Introduction à l'algorithmique : séance d'exercices 1, UCLouvain, 2021.