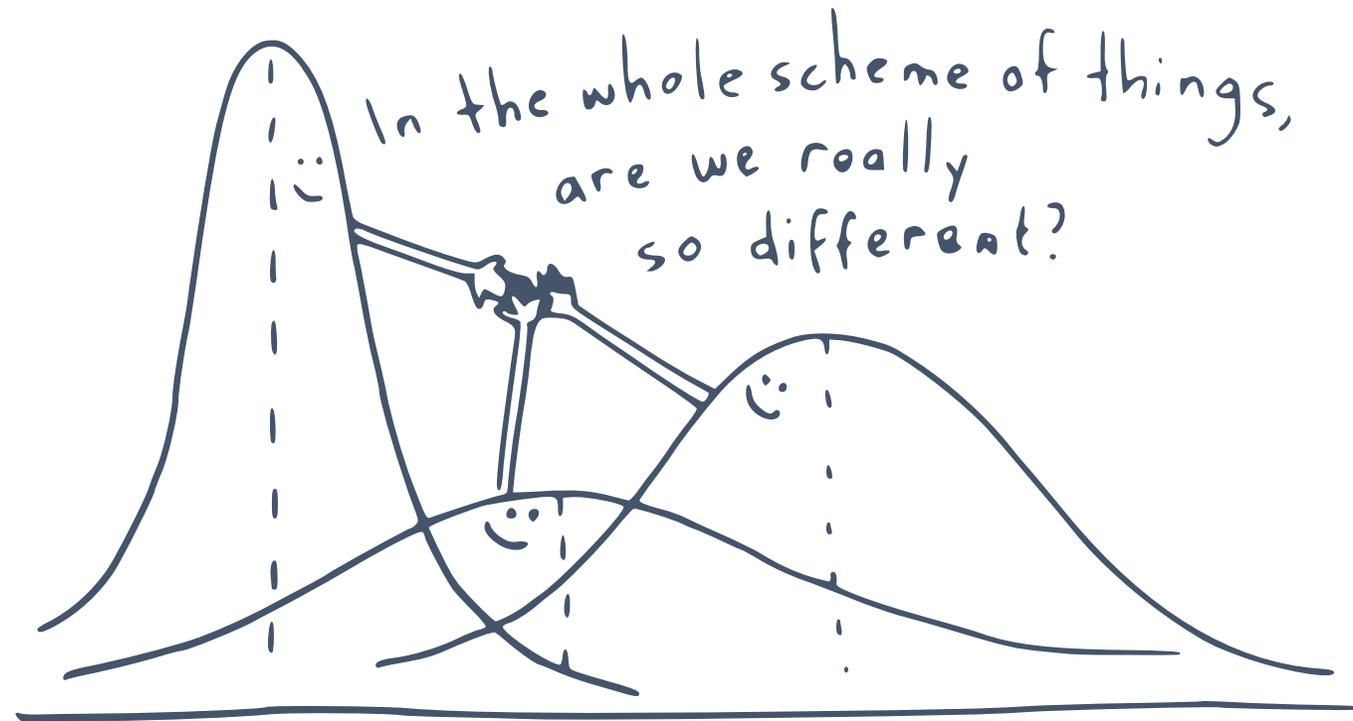


TP LBRAI2222 – Compléments de biométrie et plans expérimentaux



PLAN DES TRAVAUX PRATIQUES

TP1 – Modèles Linéaire Général (Rappel)

TP2 – Modèles hiérarchisés

TP3 – Modèles mixtes 1

TP4 – Puissance et réplication

TP5 – Modèles mixtes 2

TP6 – Choix de design et plans split plot

TP7 – Plans de criblage et plans factoriels fractionnaires

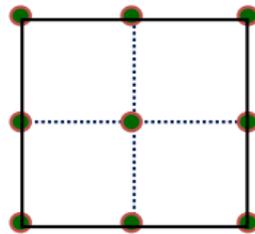
TP8 – Plans pour l'estimation de surface de réponse

PLAN FACTORIEL COMPLET

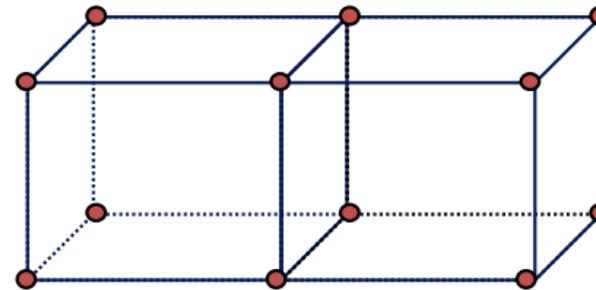
Un plan factoriel complet $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$ à k facteurs est un plan formé de toutes les combinaisons des I_1, I_2, \dots, I_k niveaux de k facteurs X_1, X_2, \dots, X_k .

ESTIME :

- toutes les interactions possibles
- les effets quadratiques, cubiques... (f(nombre de facteur))



Plan factoriel complet 3^2

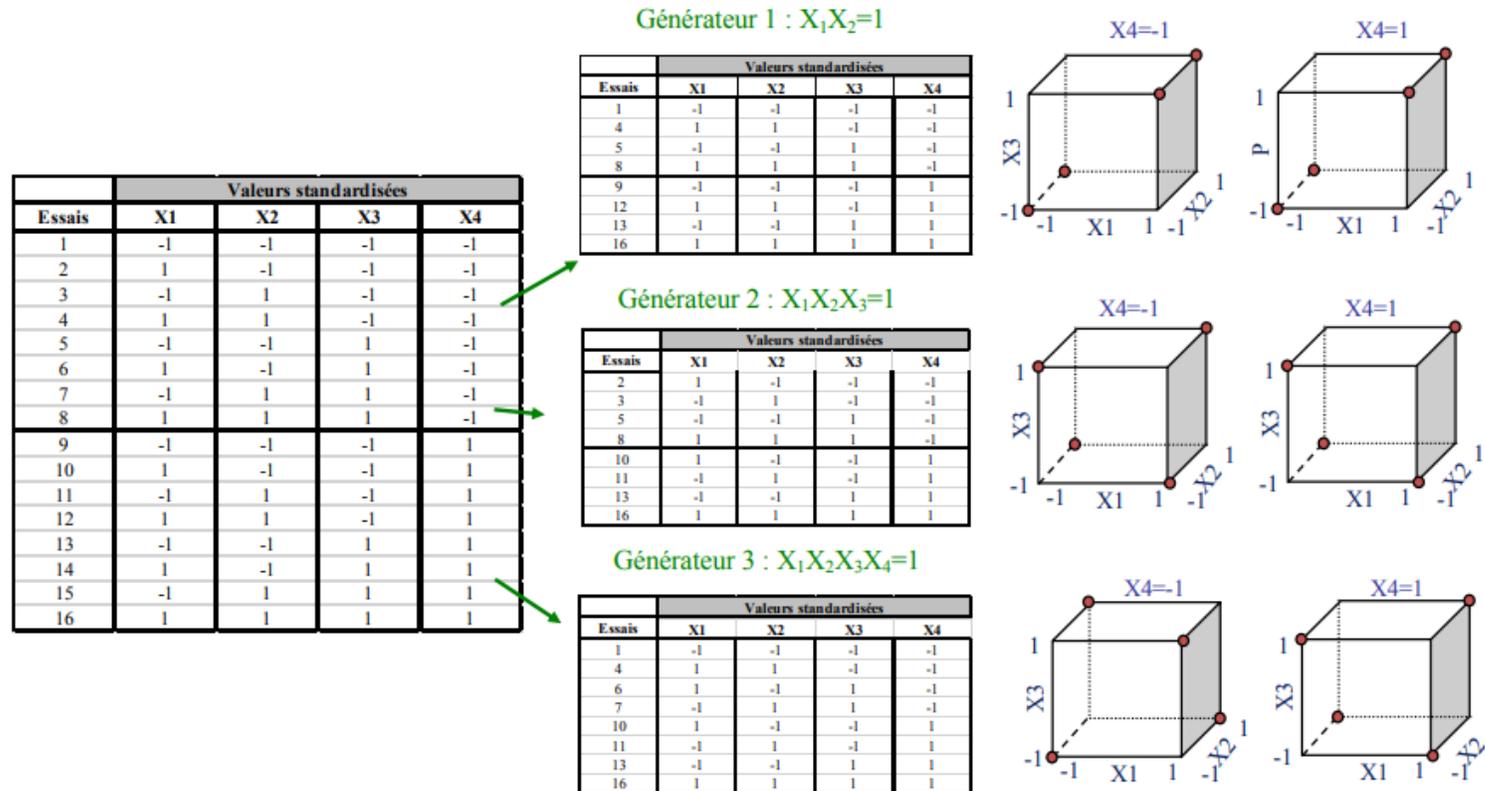


Plan factoriel complet $3 \times 2 \times 2$

Ces plans sont toujours très bons mais coûteux quand le nombre de facteurs augmente.

PLAN FACTORIEL FRACTIONNAIRE

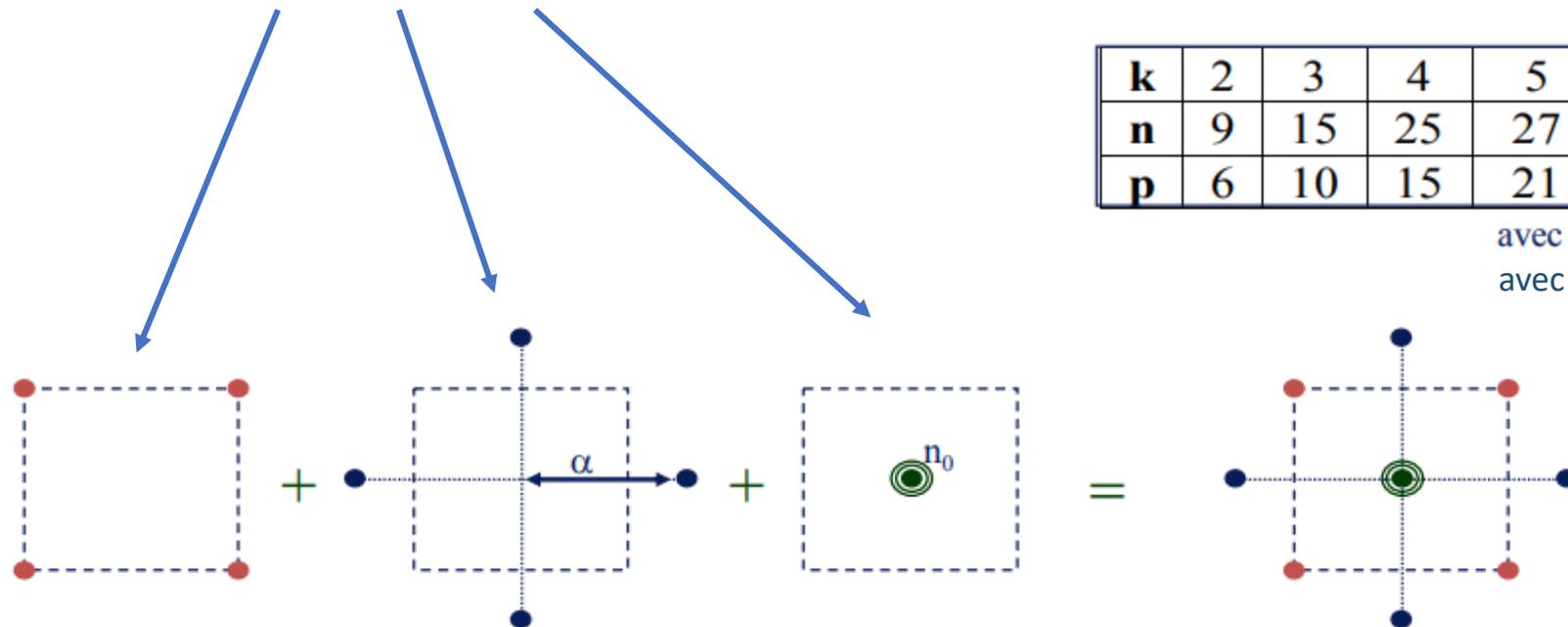
Un plan factoriel fractionnaire 2^{k-r} à k facteurs est un plan résultant de r fractionnements successifs d'un plan factoriel complet 2^k



Ces trois générateurs permettent-ils d'estimer un modèle d'ordre 1 ? Quel est le générateur le plus adéquat ?

PLAN COMPOSITE CENTRÉ

Coût : $N = 2^{k-r} + 2k + n_0$



avec k = le nombre de facteurs

k	2	3	4	5
n	9	15	25	27
p	6	10	15	21

avec $N_0=1$
avec $r=0$

C'est le plan le plus utilisé pour l'estimation de modèles quadratiques.

PLAN Box & Behnken

Définition

Fraction d'un plan factoriel complet 3^k qui permet d'estimer un modèle quadratique.

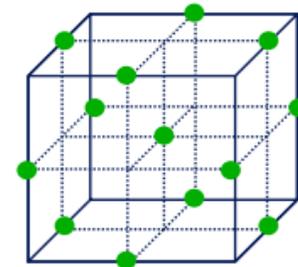
Il se construit en combinant de manière particulière un plan factoriel 2^{k-r} avec un plan de type "bloc balancé incomplet" dans le but d'obtenir un plan à 3 niveaux le plus rotatable possible qui évite les sommets du cube.

Modèle : modèle quadratique

Coût	k	3	4	5	6
	N	13	25	41	49
	p	10	15	21	28

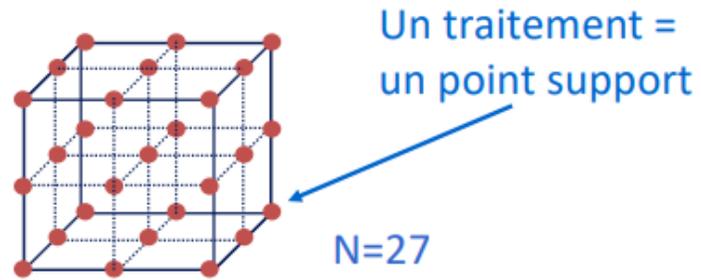
avec $N_0=1$

Plan de Box-Behnken à 3 facteurs

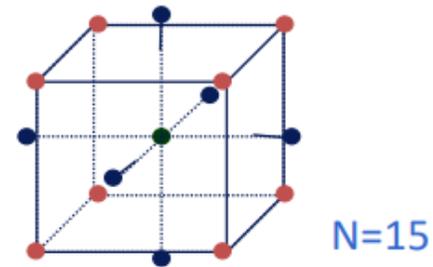


PLANS

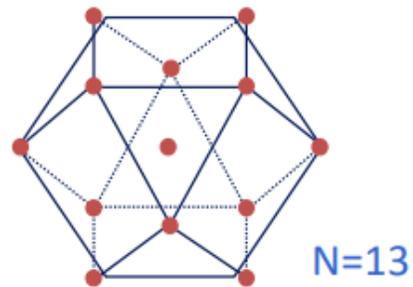
Plan factoriel complet 3^k



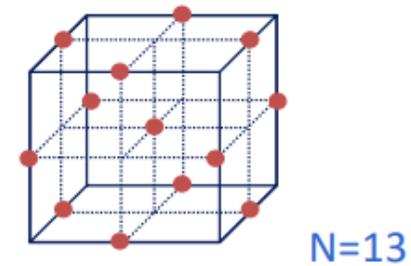
Plan composite centré



Plan de Doehlert



Plan de Box et Behnken



STANDARDISATION

LORSQUE LES FACTEURS SONT QUANTITATIFS

$$X_{standardisé} = \frac{X - \bar{X}}{\max(X) - \min(X)} * 2$$

	Facteur 1	Facteur 2
Min. =	0.4	0.6
	1.0	0.6
Max. =	1.6	0.6
	0.4	1.0
	1.0	1.0
	1.0	1.0
	1.0	1.0
	1.6	1.0



	Facteur 1	Facteur 2
Min. =	-1	-1
	0	-1
Max. =	1	-1
	-1	0
	0	0
	0	0
	0	0
	1	0

OBJECTIFS

(1) ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Réduire la variance des estimations : $\text{Var}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} \cdot \sigma^2$

-> $(X'X)^{-1}$ diagonale = Orthogonalité

-> réduire $1/N$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/N \end{bmatrix}$$

NB : Exemple pour 6 paramètres (+1 colonne pour la moyenne)

ORTHOGONALITÉ

- les estimateurs des moindres carrés des différents effets $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_m$ sont non-corrélés et indépendants sous l'hypothèse gaussienne.
- pour $l = 1, \dots, m$, l'expression de l'estimateur $\hat{\theta}_l$ ne dépend pas de la présence ou non des autres termes θ_j dans le modèle.

OBJECTIFS

(1) ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Réduire la variance des estimations : $\text{Var}(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1} \cdot \sigma^2$

-> $(X'X)^{-1}$ diagonale = **ORTHOGONALITÉ**

-> réduire $1/N$

(2) PRÉDICTIONS PRÉCISES

Réduire la variance de prédiction : $\text{Var}(\hat{Y}) = \sigma^2 + \sigma^2 \cdot x_0' \cdot (X'X)^{-1} \cdot x_0$

et

Isovariance par rotation = **ROTATABILITÉ**

Variance de prédiction (plan rotatable)

