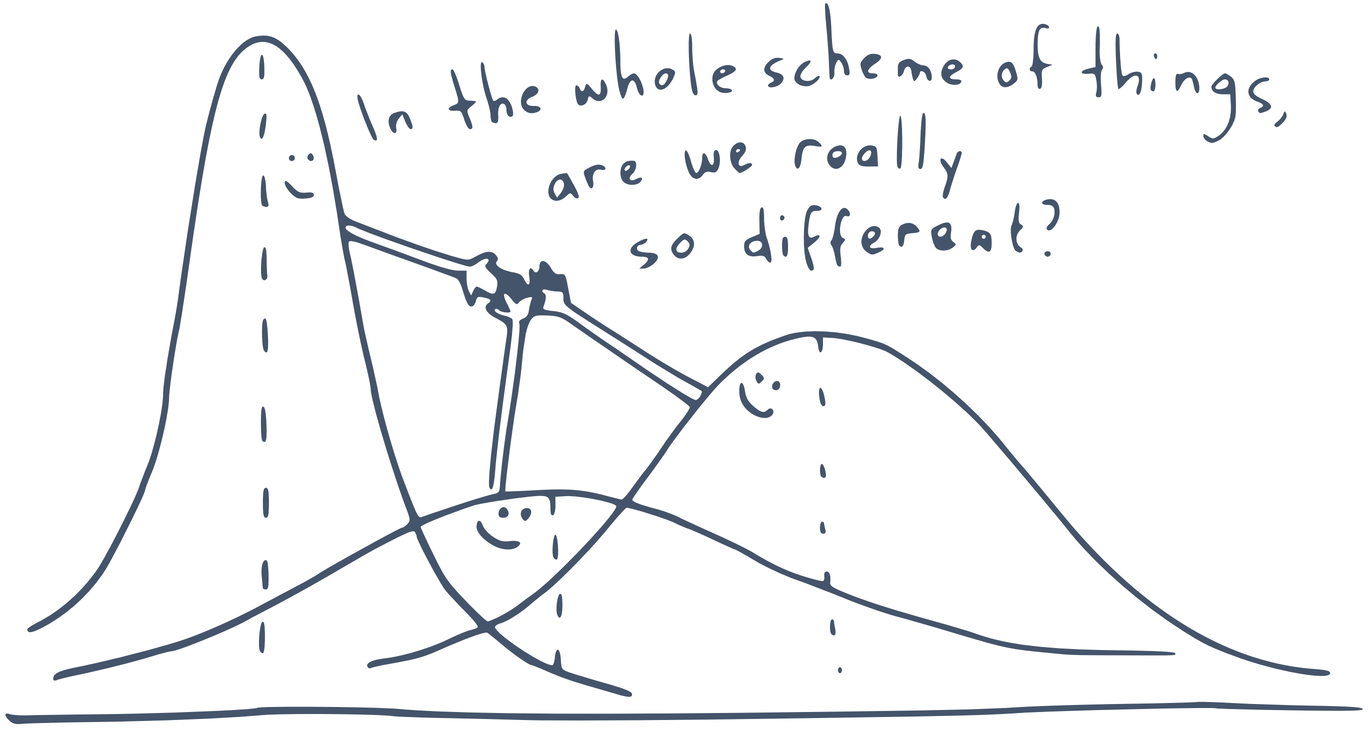
TP LBRAI2222 – Compléments de biométrie et plans expérimentaux



PLAN DES TRAVAUX PRATIQUES

TP1 – Modèles Linéaire Général (Rappel)

TP2 – Modèles hiérarchisés

TP3 – Modèles mixtes 1

TP4 – Puissance et réplication

TP5 – Modèles mixtes 2

TP6 – Choix de design et plans split plot

TP7 – Plans de criblage et plans factoriels fractionnaires

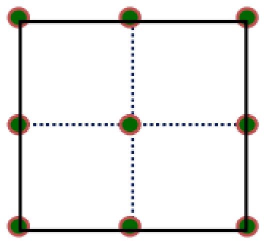
TP8 – Plans pour l'estimation de surface de réponse

PLAN FACTORIEL COMPLET

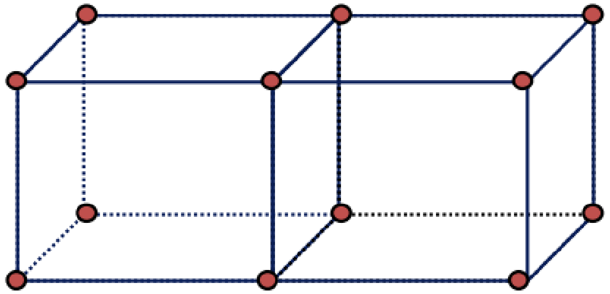
Un plan factoriel complet l_1 x l_2 x ... x l_k à k facteurs est un plan formé de toutes les combinaisons des l_1, l_2,... l_k niveaux de k facteurs X_1, X_2,... X_k .

ESTIME :

- **toutes les interactions** possibles
- les **effets quadratiques**, cubiques… (f(nbre de facteur))



Plan factoriel complet 3^2



Plan factoriel complet 3 x 2 x 2

Ces plans sont toujours très bons mais coûteux quand le nombre de facteurs augmente.

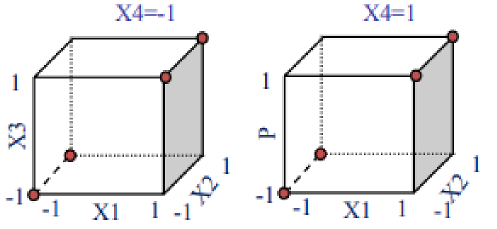
PLAN FACTORIEL FRACTIONNAIRE

Un plan factoriel fractionnaire 2^{k-r} à k facteurs est un plan résultant de r fractionnements successifs d'un plan factoriel complet 2^k

	Valeurs standardisées			
Essais	X1	X2	X3	X4
1	-1	-1	-1	-1
2	1	-1	-1	-1
3	-1	1	-1	-1
4	1	1	-1	-1
5	-1	-1	1	-1
6	1	-1	1	-1
7	-1	1	1	-1
8	1	1	1	-1
9	-1	-1	-1	1
10	1	-1	-1	1
11	-1	1	-1	1
12	1	1	-1	1
13	-1	-1	1	1
14	1	-1	1	1
15	-1	1	1	1
16	1	1	1	1

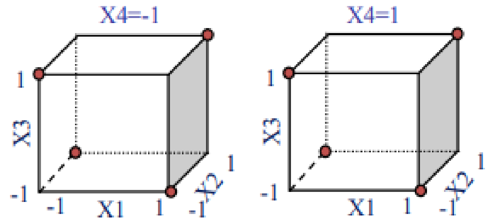
Générateur 1 : $X_1X_2=1$

	Valeurs standardisées			
Essais	X1	X2	X3	X4
1	-1	-1	-1	-1
4	1	1	-1	-1
5	-1	-1	1	-1
8	1	1	1	-1
9	-1	-1	-1	1
12	1	1	-1	1
13	-1	-1	1	1
16	1	1	1	1



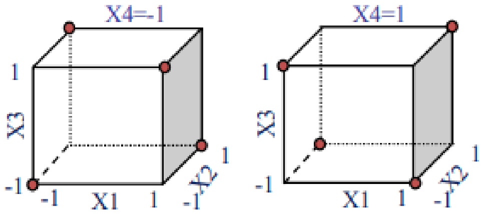
Générateur 2 : $X_1X_2X_3=1$

	Valeurs standardisées			
Essais	X1	X2	X3	X4
2	1	-1	-1	-1
3	-1	1	-1	-1
5	-1	-1	1	-1
8	1	1	1	-1
10	1	-1	-1	1
11	-1	1	-1	1
13	-1	-1	1	1
16	1	1	1	1



Générateur 3 : $X_1X_2X_3X_4=1$

	Valeurs standardisées			
Essais	X1	X2	X3	X4
1	-1	-1	-1	-1
4	1	1	-1	-1
6	1	-1	1	-1
7	-1	1	1	-1
10	1	-1	-1	1
11	-1	1	-1	1
13	-1	-1	1	1
16	1	1	1	1



Ces trois générateurs permettent-ils d'estimer un modèle d'ordre 1 ? Quel est le générateur le plus adéquat ?

PLAN COMPOSITE CENTRÉ

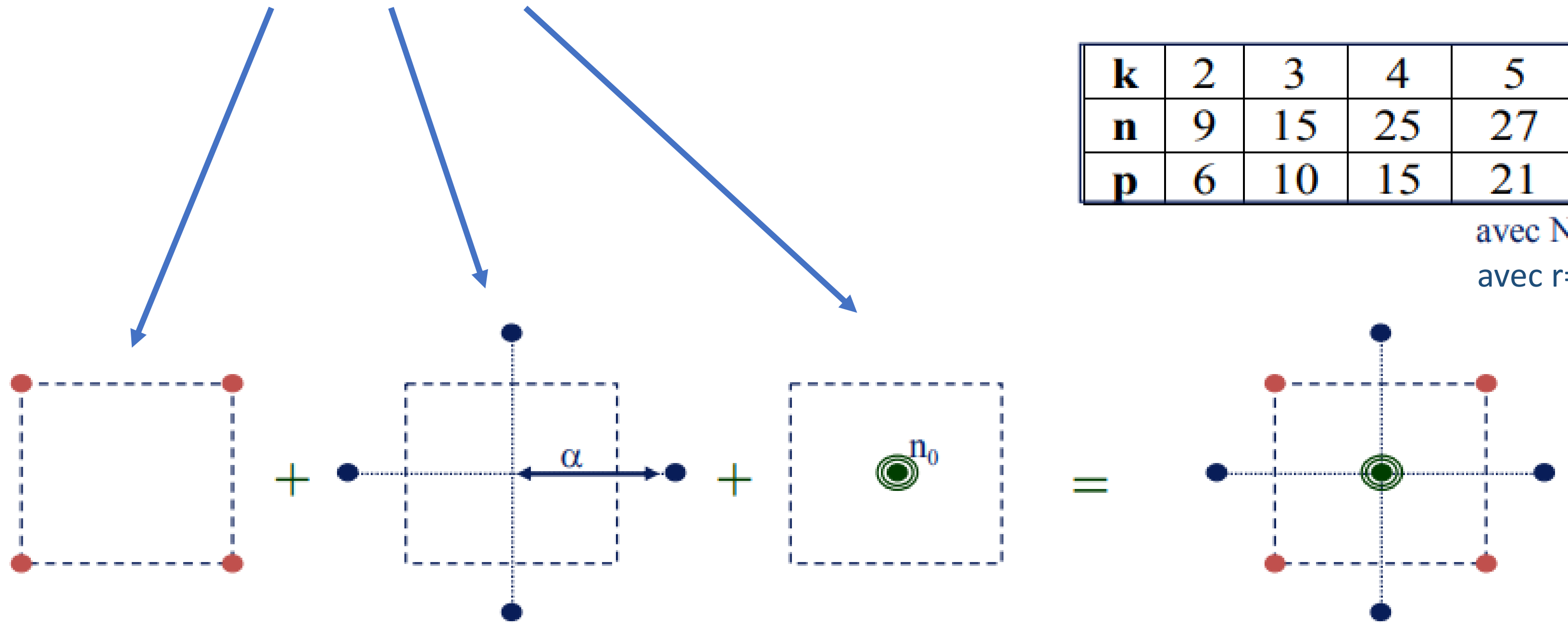
Coût : $N = 2^{k-r} + 2k + n_0$

avec k = le nombre de facteurs

k	2	3	4	5
n	9	15	25	27
p	6	10	15	21

avec N0=1

avec r=0



C'est le plan le plus utilisé pour l'estimation de modèles quadratiques.

PLAN Box & Behnken

Définition

Fraction d'un plan factoriel complet 3^k qui permet d'estimer un modèle quadratique.

Il se construit en combinant de manière particulière un plan factoriel 2^{k-r} avec un plan de type "bloc balancé incomplet" dans le but d'obtenir un plan à 3 niveaux le plus rotatable possible qui évite les sommets du cube.

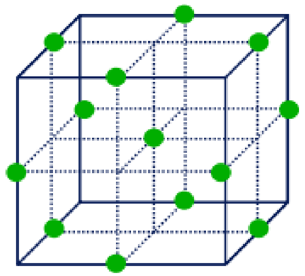
Modèle : modèle quadratique

Coût

k	3	4	5	6
N	13	25	41	49
p	10	15	21	28

avec $N_0=1$

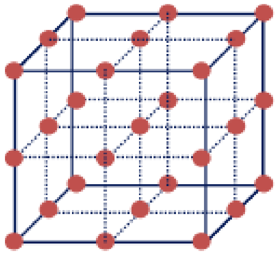
Plan de Box-Behnken à 3 facteurs



PLANS

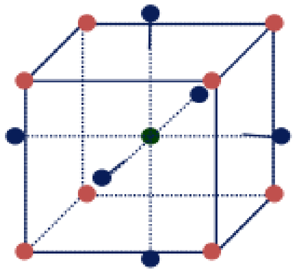
Plan factoriel complet 3^k

Un traitement = un point support



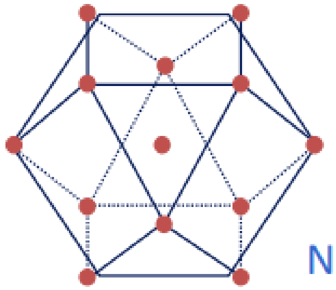
N=27

Plan composite centré



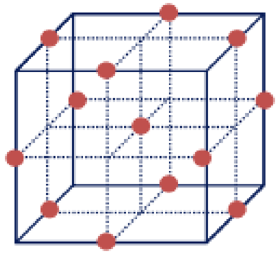
N=15

Plan de Doehlert



N=13

Plan de Box et Behnken



N=13

STANDARDISATION

LORSQUE LES FACTEURS SONT **QUANTITATIFS**

$$x_{standardisé} = \frac{X - \overline{X}}{\max(X) - \min(X)} * 2$$

	Facteur 1	Facteur 2
Min. =	0.4	0.6
	1.0	0.6
Max. =	1.6	0.6
	0.4	1.0
	1.0	1.0
	1.0	1.0
	1.0	1.0
	1.6	1.0

→

	Facteur 1	Facteur 2
Min. =	-1	-1
	0	-1
Max. =	1	-1
	-1	0
	0	0
	0	0
	0	0
	1	0

OBJECTIFS

(1) ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Réduire la variance des <u>estimations</u> : **$Var(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}. \sigma^2$**

-> $(X'X)^{-1}$ diagonale = Orthogonalité
-> réduire 1/N

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/N \end{bmatrix}$$

NB : Exemple pour 7 paramètres

ORTHOGONALITÉ

- *les estimateurs des moindres carrés des différents effets $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ sont non-corrélés et indépendants sous l'hypothèse gaussienne.*
- *pour $l = 1, \cdots, m$, l'expression de l'estimateur $\hat{\theta}_l$ ne dépend pas de la présence ou non des autres termes θ_j dans le modèle.*

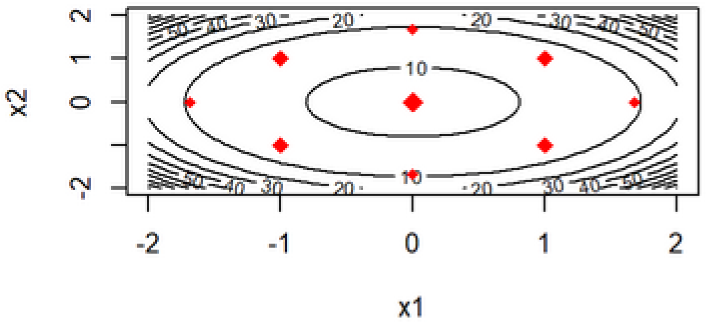
OBJECTIFS

(1) ESTIMATION DES PARAMÈTRES

Réduire la variance des estimations : $\mathbf{Var(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}.\ \sigma^2}$

-> $(X'X)^{-1}$ diagonale = **ORTHOGONALITÉ**
-> réduire 1/N

Variance de prédiction (plan rotatable)



(2) PRÉDICTIONS PRÉCISES

Réduire la variance de prédiction : $\mathbf{Var(\hat{Y}) = \sigma^2 + \sigma^2.x_0'.(X'X)^{-1}.\ x_0}$

et

Isovariance par rotation = **ROTATABILITÉ**