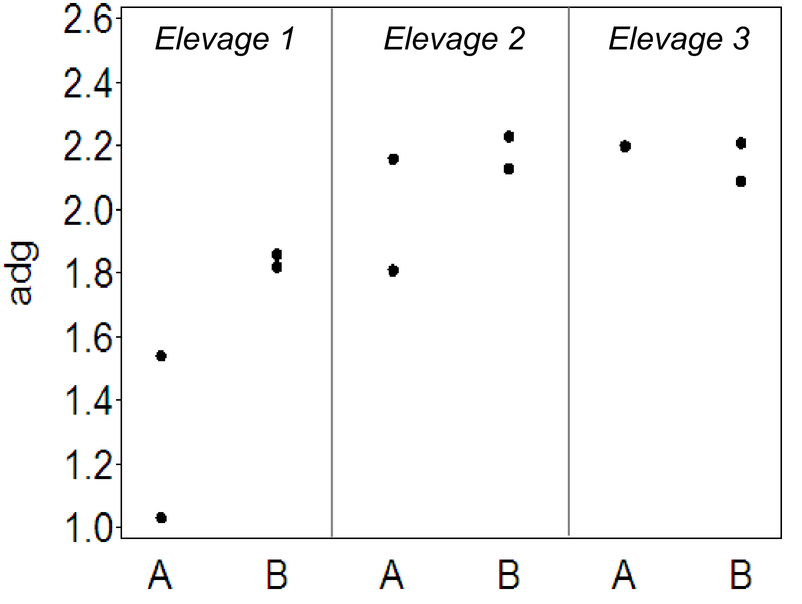
CH 03. Modèles linéaires mixtes



Modèles mixtes

Les modèles mixtes comportent un ou plusieurs facteurs fixes et un ou plusieurs aléatoires.

Différence par rapport aux modèles fixes:

La présence de facteurs aléatoires implique une modification de la matrice de variance-covariance (cf Chapitre 01). Celle-ci peut affecter l'inférence sur les paramètres fixes du modèle.

Différence par rapport aux modèles aléatoires:

La partie fixe ne se réduit pas à la moyenne

Plan du chapitre

- Exemple
- Le modèle d'ANOVA 2 mixte
- Structure de la matrice variance-covariance
- Tests d'hypothèse sur les effets fixes
- Méthode générale d'inférence sur les effets fixes et aléatoires

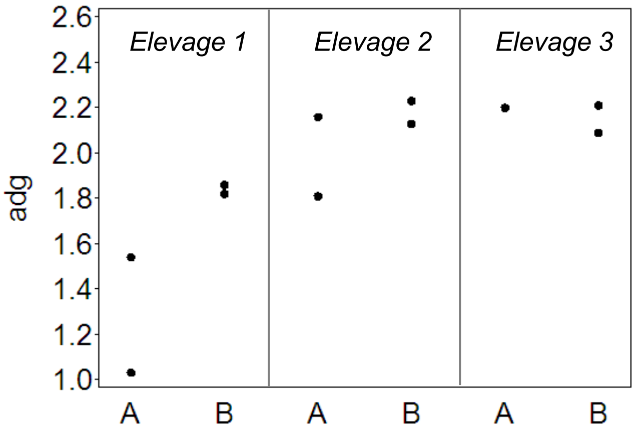
Exemple

Contexte:

On souhaite comparer les effets de deux additifs alimentaires sur la croissance des truites en région wallonne. Trois élevages ont été sélectionnés au hazard. Dans chaque élevage, on teste chaque additif dans deux bassins.

Données:

	elevage	additif	adg
1	1	A	1.03
2	1	A	1.54
3	1	B	1.82
4	1	B	1.86
5	2	A	1.81
6	2	A	2.16
7	2	B	2.13
8	2	B	2.23
9	3	A	2.82
10	3	A	2.2
11	3	B	2.21
12	3	B	2.09



Questions:

- Y-a-t-il des différences entre additifs en région wallonne ?
- Quel est le meilleur additif ?
- Le meilleur additif diffère-t-il entre élevages ?

Le modèle d'ANOVA2 mixte

On suppose que les observations suivent le modèle probabiliste suivant :

Partie fixe   Partie aléatoire

$$Y_{ijk} = \boxed{\mu + \alpha_i} + \boxed{b_j + (\alpha b)_{ij} + \varepsilon_{ijk}} \quad i = 1, \ldots, a, \quad j = 1, \ldots, b \quad k = 1, \ldots, n$$

$$b_i \sim i\, N(0, \sigma_b^2)$$
$$(\alpha b)_{ij} \sim i\, N(0, \sigma_{\alpha b}^2)$$
$$\varepsilon_{ijk} \sim i\, N(0, \sigma^2)$$

μ	Moyenne générale (fixe)
α_i	Effet du $i^{\text{ème}}$ traitement (fixe)
b_j	Effet du $j^{\text{ème}}$ élevage (aléatoire)
$(\alpha b)_{ij}$	Effet d'interaction entre le $i^{\text{ème}}$ traitement et le $j^{\text{ème}}$ élevage (aléatoire)
ε_{ijk}	Fluctuation aléatoire entre les bassins d'un même élevage ayant reçu le même traitement

Hypothèses : les termes b_j, $(\alpha b)_{ij}$ et ε_{ijk} sont indépendants entre eux

Le modèle d'ANOVA2 mixte

Conséquences de la définition du modèle :

$$E[Y_{ijk}] = \mu + \alpha_i$$
$$\sigma^2_{Y_{ijk}} = \sigma^2_Y = \sigma^2_b + \sigma^2_{\alpha b} + \sigma^2$$

On note que les observations liées au même niveau j de b sont corrélées :

$var(Y_{ijk}, Y_{ijk'}) = var(b_j + (\alpha b)_{ij}, b_j + (\alpha b_{ij}) = \sigma^2_b + \sigma^2_{\alpha b}$ partagent b_j et $(\alpha b)_{ij}$

$var(Y_{ijk}, Y_{i'jk'}) = var(b_j, b_j) = \sigma^2_b$ partagent b_j , pas $(\alpha b)_{ij}$

$var(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'}) = 0$ aucun effet aléatoire commun

De ce fait, la méthode GLM n'est pas toujours la plus appropriée (cf Ch 1 et 2).

Ecriture du modèle sous forme matricielle

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + b_j + (\alpha b)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad i = 1,\ldots,a, \quad j = 1,\ldots,b \quad k = 1,\ldots,n$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{131} \\ Y_{132} \\ Y_{231} \\ Y_{232} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & & 1 & & & & & \\ 1 & & & 1 & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & & 1 & & \\ & 1 & & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & & 1 & \\ & & 1 & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \alpha b_{11} \\ \alpha b_{21} \\ \alpha b_{12} \\ \alpha b_{22} \\ \alpha b_{13} \\ \alpha b_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{231} \\ \varepsilon_{232} \end{bmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Matrice variance-covariance de Y

$\text{cov}(Y_{ijk}, Y_{ijk}) : \sigma_Y^2$

$\text{cov}(Y_{ijk}, Y_{ijk'})$: même additif, même élevage

$\text{cov}(Y_{ijk}, Y_{i'jk'})$: même élevage, additifs ≠

$\text{cov}(Y_{ijk}, Y_{i'j'k'})$: additifs et élevages ≠

$$
\begin{array}{ccc}
 & ijk \rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} 111 & 112 & 211 & 212 & 121 & 122 & 221 & 222 & 131 & 132 & 231 & 232 \end{array} & ijk \downarrow \\
V(Y)= & \left(\begin{array}{cccccccccccc}
\sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2 & \sigma_b^2+\sigma_{ab}^2+\sigma^2
\end{array}\right) & \begin{array}{c} 111 \\ 112 \\ 211 \\ 212 \\ 121 \\ 122 \\ 221 \\ 222 \\ 131 \\ 132 \\ 231 \\ 232 \end{array}
\end{array}
$$

Construction de la matrice variance-covariance

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad \mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$$

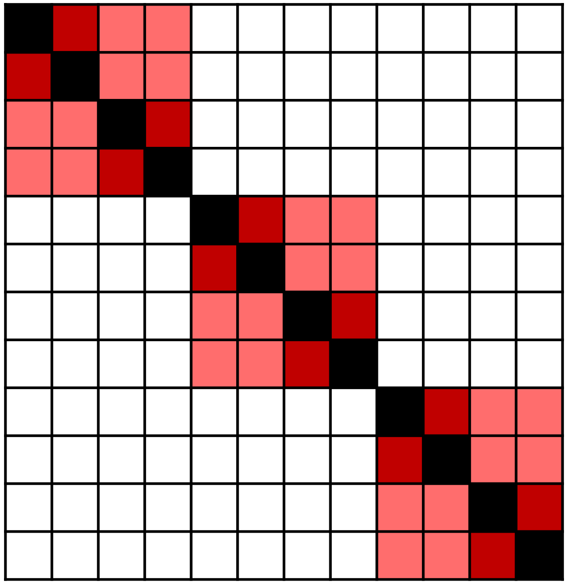
$$\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{G})$$

$$\underbrace{\mu + \alpha_i}_{\mathbf{X\beta}} \qquad \underbrace{b_j + (\alpha b)_{ij}}_{\mathbf{Zu}}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 & & & & & & & & \\ & \sigma_b^2 & & & & & & & \\ & & \sigma_b^2 & & & & & & \\ & & & \sigma_{\alpha b}^2 & & & & & \\ & & & & \sigma_{\alpha b}^2 & & & & \\ & & & & & \sigma_{\alpha b}^2 & & & \\ & & & & & & \sigma_{\alpha b}^2 & & \\ & & & & & & & \sigma_{\alpha b}^2 & \\ & & & & & & & & \sigma_{\alpha b}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 \mathbf{I}_b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{\alpha b}^2 \mathbf{I}_{ab} \end{bmatrix}$$

Structure de la matrice Variance Covariance des Y

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ'} + \mathbf{R}$$



$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V_1} = \mathbf{V_2} = \mathbf{V_3} = \begin{bmatrix} \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 + \sigma^2 & \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 \\ \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 & \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 + \sigma^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 \\ \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 + \sigma^2 & \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 \\ \sigma_b^2 & \sigma_b^2 & \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 & \sigma_b^2 + \sigma_{\alpha b}^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$

Modélisation R, package lme4

```
require(lme4)

dataset <- data.frame("Farm" = kronecker(c(1, 2, 3), c(1, 1, 1, 1)),
                      "Additive"  = rep(rep(c("A", "B"), each = 2), time = 3),
                      "ADG"  = c(1.03, 1.54, 1.82, 1.86,
                                 1.81, 2.16, 2.13, 2.23,
                                 2.82, 2.20, 2.21, 2.09))
dataset$Additive <- as.factor(dataset$Additive)
dataset$Farm <- as.factor(dataset$Farm)
```

Modélisation R, package lme4

```
mod_lmer <- lmer(ADG ~ 1 + Additive + (1|Farm) + (1|Additive:Farm), dataset)
summary(mod_lmer)

Linear mixed model fit by REML. t-tests use Satterthwaite's method ['lmerModLmerTest']
Formula: ADG ~ 1 + Additive + (1 | Farm) + (1 | Additive:Farm)
   Data: dataset

REML criterion at convergence: 11.6

Scaled residuals: 
     Min       1Q   Median       3Q      Max 
-1.42880 -0.46160  0.03912  0.34268  1.64403 

Random effects:
 Groups        Name        Variance Std.Dev.
 Additive:Farm (Intercept) 0.07320  0.2705  
 Farm          (Intercept) 0.10033  0.3168  
 Residual                  0.06608  0.2571  
Number of obs: 12, groups:  Additive:Farm, 6; Farm, 3

Fixed effects:
            Estimate Std. Error     df t value Pr(>|t|)   
(Intercept)   1.9267     0.2624 3.2365   7.342  0.00402 **
AdditiveB     0.1300     0.2661 2.0000   0.488  0.67352   
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Correlation of Fixed Effects:
          (Intr)
AdditiveB -0.507
```

Modélisation R, package lme4

```
getME(mod_lmer, "Z")
```

```
    A:1 A:2 A:3 B:1 B:2 B:3 1 2 3
1    1   .   .   .   .   .  1 . .
2    1   .   .   .   .   .  1 . .
3    .   .   .   1   .   .  1 . .
4    .   .   .   1   .   .  1 . .
5    .   1   .   .   .   .  . 1 .
6    .   1   .   .   .   .  . 1 .
7    .   .   .   .   1   .  . 1 .
8    .   .   .   .   1   .  . 1 .
9    .   .   1   .   .   .  . . 1
10   .   .   1   .   .   .  . . 1
11   .   .   .   .   .   1  . . 1
12   .   .   .   .   .   1  . . 1
```

Attention à l'ordre des colonnes de ces sorties !!

$\sigma_{\alpha b}^2$

```
(getME(mod_lmer, "Lambda") * sigma(mod_lmer)) ** 2
```

σ_b^2

```
 [1,] 0.07319611 .          .          .          .          .          .         .         .
 [2,] .          0.07319611 .          .          .          .          .         .         .
 [3,] .          .          0.07319611 .          .          .          .         .         .
 [4,] .          .          .          0.07319611 .          .          .         .         .
 [5,] .          .          .          .          0.07319611 .          .         .         .
 [6,] .          .          .          .          .          0.07319611 .         .         .
 [7,] .          .          .          .          .          .          0.1003312 .         .
 [8,] .          .          .          .          .          .          .         0.1003312 .
 [9,] .          .          .          .          .          .          .         .         0.1003312
```

Test de l'effet du traitement fixe (facteur A)

Hypothèses :

H_0: $\alpha_1 = \alpha_i = \ldots = 0$ $\quad$ H_1: non H_0

Si les données sont balancées, on peut réaliser ce test au départ de l'espérance des carrés moyens.

$$E(MSA) = \sigma^2 + nb\frac{\sum \alpha_i^2}{a-1} + n\sigma_{\alpha b}^2 \qquad E(MSB) = \sigma^2 + na\sigma_b^2 \qquad E(MSAB) = \sigma^2 + n\sigma_{\alpha b}^2$$

$$E(MSE) = \sigma^2$$

Le rapport $MSA \,/\, MSAB$ permet de tester l'hypothèse H_0

$$F_{obs} = \frac{MSA}{MSAB} \sim F\,(a-1, (a-1)(b-1)) \quad \text{sous} \;\; H_0$$

On rejette H_0 si $p\text{-valeur} < \alpha$.

!!! Un modèle fixe (cf Biométrie) aurait considéré le rapport $MSA \,/\, MSE$.

Modélisation R avec lm (à ne pas faire)

```
mod_lm <- stats::lm(ADG ~ Additive*Farm, dataset)
# Tests ANOVA (ils ne sont pas correct à cause de l'effet Farm)
anova(mod_lm)

Analysis of Variance Table

Response: ADG
              Df  Sum Sq Mean Sq F value  Pr(>F)
Additive       1 0.05070 0.05070  0.7672 0.41477
Farm           2 1.22762 0.61381  9.2884 0.01455 *
Additive:Farm  2 0.42495 0.21247  3.2153 0.11246
Residuals      6 0.39650 0.06608
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

$$F_{obs} = \frac{MSA}{MSAB} = \frac{0.05070}{0.21247} = 0.2386$$

Méthode générale d'inférence sur les effets fixes et aléa.

L'inférence sur $\boldsymbol{\beta}$ et $\mathbf{u}$ peut également être réalisée à l'aide de combinaisons linéaires de la forme:

$$\mathbf{L}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix}$$

En se basant sur la matrice variance-covariance $\mathbf{C}$ de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ et $\mathbf{u}$:

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{C}}_{11} & \hat{\mathbf{C}}_{21}\\ \hat{\mathbf{C}}_{21} & \hat{\mathbf{C}}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{11} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-} \longleftarrow$$
$$\hat{\mathbf{C}}_{21} = \ldots$$
$$\hat{\mathbf{C}}_{22} = \ldots$$

On reconnaît ici la matrice variance covariance des $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vue plus haut

on peut construire un intervalle de confiance à $\mathbf{L}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix}$

$$\mathbf{L}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} \pm t_{\hat{v},\alpha/2}\sqrt{\mathbf{L}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{L}'}$$

et réaliser un test d'hypothèse $H_0:\ \mathbf{L}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad H_1:\ \mathbf{L}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$

avec la statistique
$$\frac{\mathbf{L}\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix}}{\sqrt{\mathbf{L}\hat{\mathbf{C}}\mathbf{L}'}} \underset{approx.}{\sim} t_{\hat{v}}$$

Construction du vecteur $\mathbf{L}$

Avoir en tête : $\mathbf{L}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} = \mathbf{L}[\mu \;\; \alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; \alpha b_{11} \;\; \alpha b_{21} \;\; \alpha b_{12} \;\; \alpha b_{22} \;\; \alpha b_{13} \;\; \alpha b_{23}]'$

Pour estimer la moyenne de l'additif A <u>sur la population des élevages:</u>

$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1$ $\quad \mathbf{L} = [1 \quad 1 \;\; 0 \quad 0 \;\; 0 \;\; 0 \quad 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$ (équivalent à `LSMEANS`)

Pour estimer la moyenne de l'additif A <u>pour l'élevage 2</u> :

$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{b}_2 + \widehat{\alpha b}_{12}$ $\quad \mathbf{L} = [1 \quad 1 \;\; 0 \quad 0 \;\; 1 \;\; 0 \quad 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$

Pour estimer la différence entre les deux additifs <u>sur la population</u> :

$(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_2) - (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1) = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1$

$\mathbf{L} = [0 \quad 1 \; -1 \quad 0 \;\; 0 \;\; 0 \quad 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$ (équivalent au test F du facteur A)

Pour estimer la différence entre les deux additifs <u>pour l'élevage 1</u> :

$\left(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_2 + \hat{b}_1 + \widehat{\alpha b}_{21}\right) - \left(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_1 + \hat{b}_1 + \widehat{\alpha b}_{11}\right) = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha b}_{21} - \widehat{\alpha b}_{11}$

$\mathbf{L} = [0 \quad 1 \; -1 \quad 0 \;\; 0 \;\; 0 \quad 1 \; -1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$

Modélisation R

!! Le package LME4 de R ne permet pas l'estimation de combinaisons linéaires des effets fixes et aléatoires. Il se limite aux combinaisons linéaires des effets fixes $\mathbf{L\beta}$

!! L'écriture du vecteur $\mathbf{L}$ doit tenir compte de la structure du vecteur $\boldsymbol{\beta}$ de R

$$\boldsymbol{\beta}_R = \begin{bmatrix} \mu + \alpha_1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 \end{bmatrix} \quad \text{au lieu de} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

```
Fixed effects:
            Estimate Std. Error t value
(Intercept)   1.9267     0.2624   7.342
AdditiveB     0.1300     0.2661   0.488
```

```
getME(mod_lmer, "X")

   (Intercept) AdditiveB
1            1         0
2            1         0
3            1         1
4            1         1
5            1         0
6            1         0
7            1         1
8            1         1
9            1         0
10           1         0
11           1         1
12           1         1
```

Modélisation R

```
# Estimation de la moyenne pour l'additif A
lmerTest::contest(mod_lmer, c(1, 0), joint = FALSE)

  Estimate Std. Error       df  t value    lower    upper    Pr(>|t|)
1 1.926667   0.262405 3.236537 7.342341 1.125064 2.728269 0.004015857
```

```
# Estimation de la moyenne pour l'additif B
lmerTest::contest(mod_lmer, c(1, 1), joint = FALSE)

  Estimate Std. Error       df  t value    lower    upper    Pr(>|t|)
1 2.056667   0.262405 3.236537 7.837758 1.255064 2.858269 0.003280698
```

```
# Estimation de la différence entre l'additif B et l'additif A
lmerTest::contest(mod_lmer, c(0, 1), joint = FALSE)

  Estimate Std. Error       df   t value     lower    upper  Pr(>|t|)
1     0.13  0.2661301 1.999982 0.4884828 -1.015075 1.275075 0.6735182
```

Conséquence du facteur aléatoire

D'où vient la valeur 0.262405 de l'erreur standard de ces moyennes ?

1. L'effet d'un additif est calculé comme la moyenne de $n=6$ valeurs

$$\frac{1}{6}(Y_{111}+Y_{112}+Y_{121}+Y_{122}+Y_{131}+Y_{132})$$

2. Sa variance vaut donc

$$\frac{1}{6\times 6}(\sigma^2_{Y_{111}}+\sigma^2_{Y_{112}}+2\sigma_{Y_{111}Y_{112}}+\sigma^2_{Y_{121}}+\sigma^2_{Y_{122}}+2\sigma_{Y_{121}Y_{122}}+\sigma^2_{Y_{131}}+\sigma^2_{Y_{132}}+2\sigma_{Y_{131}Y_{132}})$$

$$=\frac{1}{6\times 6}\left(6\times\left(\sigma_b^2+\sigma_{\alpha b}^2+\sigma^2\right)+2\times 3\times\left(\sigma_b^2+\sigma_{\alpha b}^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{6}(\sigma^2+2\sigma_b^2+2\sigma_{\alpha b}^2)$$

$$=\frac{1}{6}(0.06608+2\times 0.10033+2\times 0.07320)=0.6885=\ 0.2624^2$$

Dans un modèle fixe, les termes de covariances auraient été nuls et la variance obtenue aurait été $\frac{1}{6}\sigma^2$

Conséquence du facteur aléatoire

D'où vient la valeur 0.2661301 de l'erreur standard de la différence ?

Cette différence est calculée comme la différence entre deux moyennes

Sa variance est le double de la variance de chaque moyenne (cf proba)

Attention qu'ici, les différences font disparaître les effets des blocs (et donc σ_b^2)

Elle vaut donc :

$$2 \times \frac{1}{6}(\sigma^2 + 2\sigma_{\alpha b}^2) = 0.2661^2$$

Methode générale d'inférence sur les effets fixes et aléa.

La méthode peut être étendue au cas de contrastes multiples
(par ex. test sur l'effet d'un facteur) :

$$\frac{\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix}'\mathbf{L}'(\mathbf{L}'\hat{\mathbf{C}}\mathbf{L})^{-1}\mathbf{L}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix}}{rank(\mathbf{L})} \underset{approx.}{\sim} F(rank(\mathbf{L}),\hat{\upsilon})$$

Dans la plupart des cas où le jeu de données est balancé, ces statistiques t et F suivent une distribution exacte.

Dans les autres cas, elles suivent une distribution approximative et leur nombre υ de degré de liberté doit être estimé. Il existe plusieurs méthodes d'estimation du nombre de degrés de liberté. La méthode de Satterthwaite est d'usage assez général. Elle fournit un nombre de degrés de liberté qui n'est plus un entier…

Une méthode alternative pour tester l'hypothèse H_0: $\alpha_1 = \alpha_i = \ldots = \alpha_a$ repose sur le test du rapport de vraisemblance de modèles emboîtés. Attention que, pour tester des effets fixes, on doit utiliser la méthode ML au lieu de REML.

Modélisation R des tests sur les effets fixes

Test de l'hypothèse $H_0: \alpha_1 = \alpha_i = \ldots = 0 \qquad H_1: \text{non } H_0$

```
anova(mod_lmer)

Type III Analysis of Variance Table with Satterthwaite's method
           Sum Sq  Mean Sq NumDF DenDF F value Pr(>F)
Additive 0.015769 0.015769     1     2  0.2386 0.6735
```

Test Anova

```
lmerTest::show_tests(anova(mod_lmer), type = “3”)

$Additive
          (Intercept) AdditiveB
AdditiveB           0         1
```

Contraste utilisé par le test Anova

```
lmerTest::contest(mod_lmer, c(0, 1))

      Sum Sq    Mean Sq  NumDF    DenDF    F value    Pr(>F)
1 0.01576855 0.01576855  1      1.999982 0.2386155 0.6735182
```

Ce contraste réalisé manuellement

Modélisation R - Moyennes et comparaisons

Estimation de la moyenne des traitements et de leur intervalle de confiance

```
require(emmeans)

emmeans::emmeans(mod_lmer, ~ Additive)

 Additive emmean    SE   df lower.CL upper.CL
 A          1.93 0.262 3.24     1.13     2.73
 B          2.06 0.262 3.24     1.26     2.86
```

Ce sont les mêmes valeurs que les estimations réalisées plus haut

Comparaisons des moyennes des traitements deux à deux

```
lmerTest::ls_means(mod_lmer, pairwise=TRUE)

Least Squares Means table:

                      Estimate Std. Error df t value    lower    upper Pr(>|t|)
AdditiveA - AdditiveB -0.13000    0.26613  2 -0.4885 -1.27508  1.01508   0.6735

  Confidence level: 95%
  Degrees of freedom method: Satterthwaite
```

Modélisation R - Inférence sur les effets aléatoires

Les tests sur les effets aléatoires s’effectuent à l’aide du rapport de vraisemblance de modèles emboîtés (cf Chapitre 1 et 2).

```
require(lmerTest)

lmerTest::ranova(mod_lmer)

ANOVA-like table for random-effects: Single term deletions

Model:
ADG ~ Additive + (1 | Farm) + (1 | Additive:Farm)
                    npar  logLik    AIC     LRT Df Pr(>Chisq)
<none>                 5 -5.7936 21.587
(1 | Farm)             4 -6.0627 20.125 0.53815  1     0.4632
(1 | Additive:Farm)    4 -6.3886 20.777 1.18989  1     0.2754
```