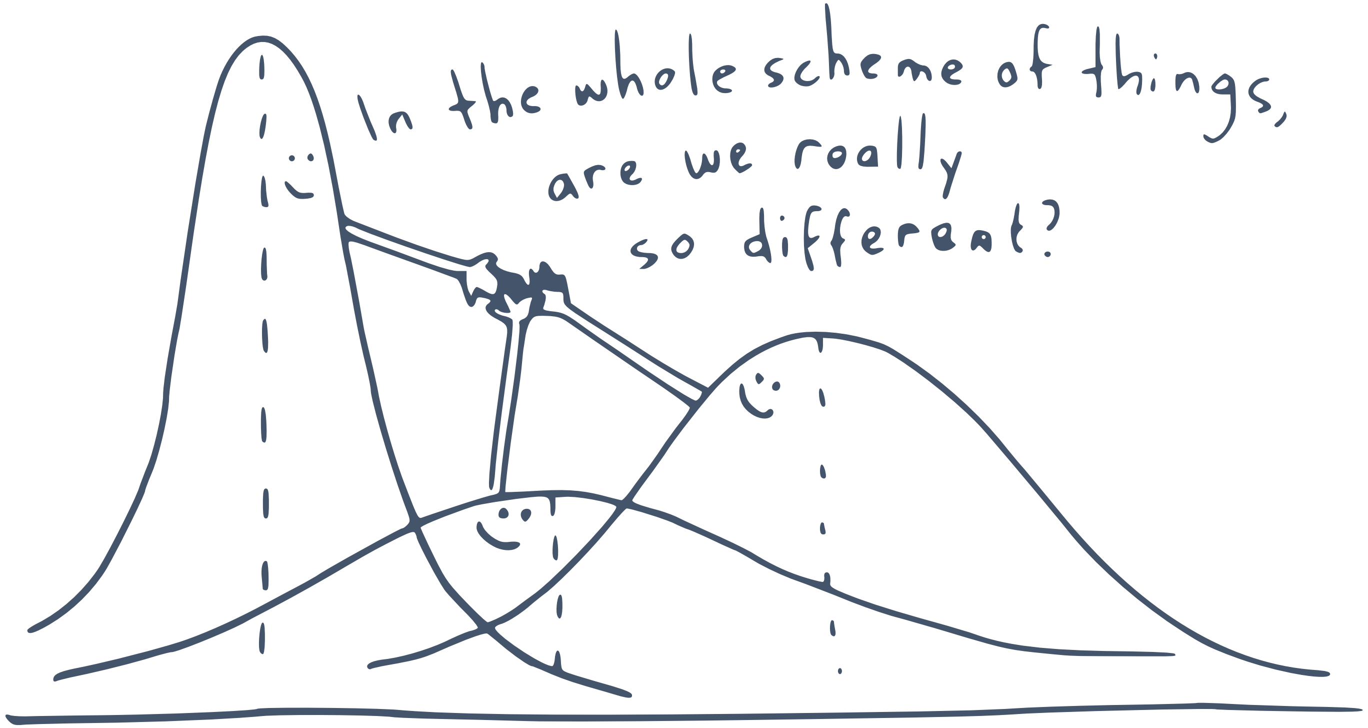
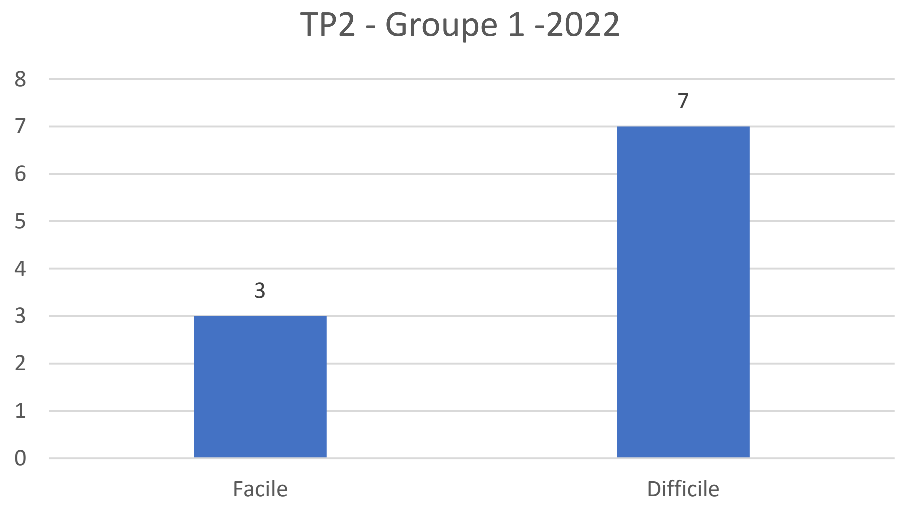
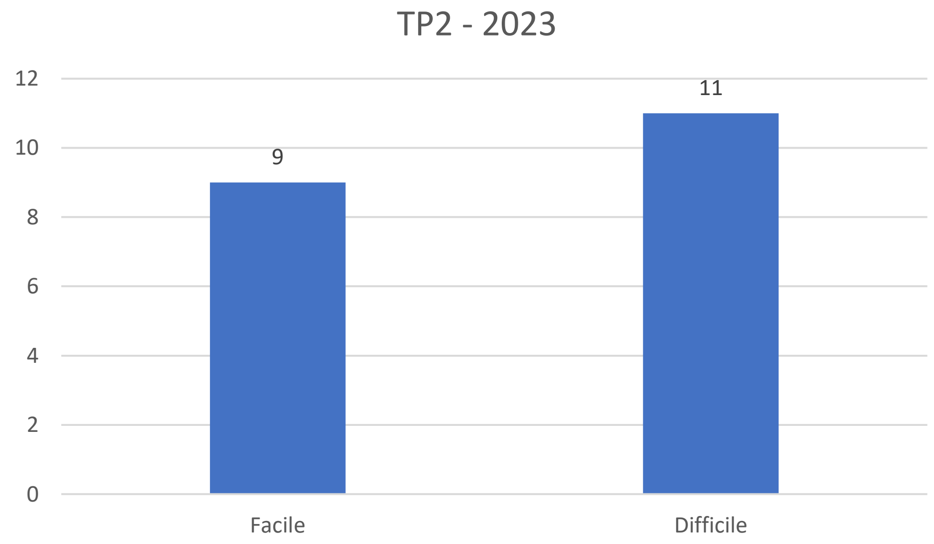
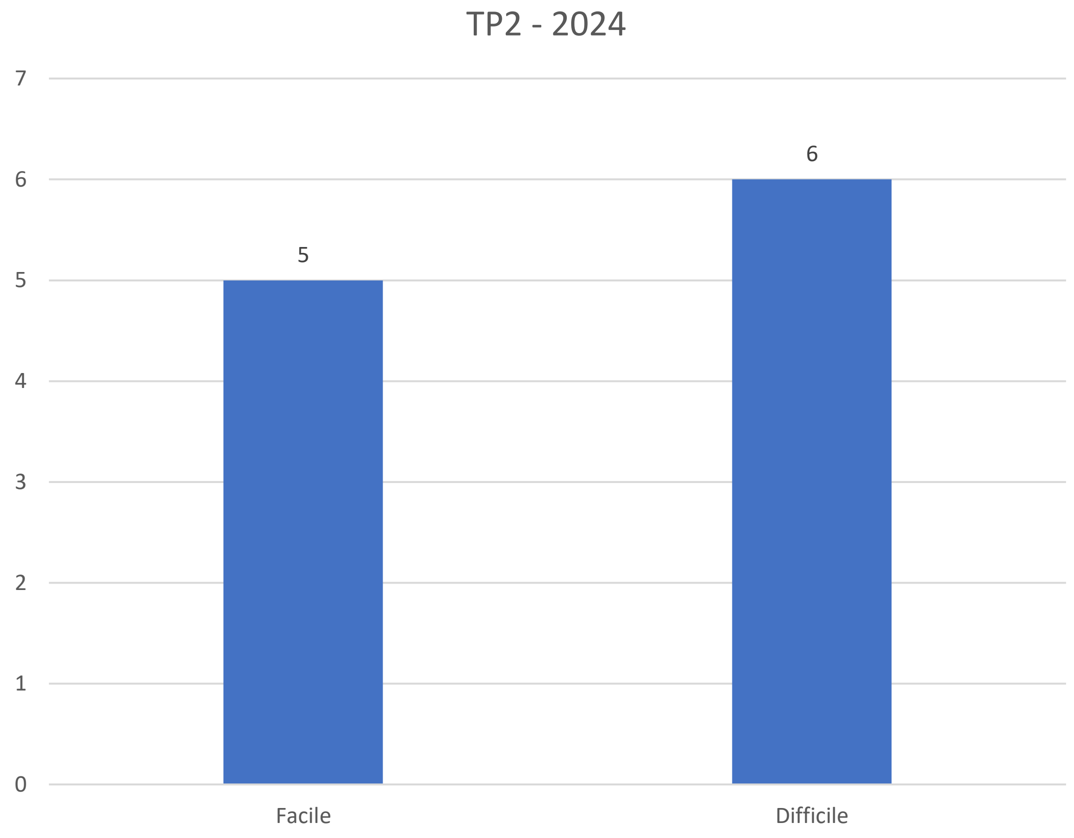
TP LBRAI2222 – Compléments de biométrie et plans expérimentaux



FEEDBACK TP2







TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

MATRICES

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{G})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 &&&&&&&&& \\ & \sigma_a^2 &&&&&&&& \\ && \sigma_a^2 &&&&&&& \\ &&& \sigma_b^2 &&&&&& \\ &&&& \sigma_b^2 &&&&& \\ &&&&& \sigma_b^2 &&&& \\ &&&&&& \sigma_b^2 &&& \\ &&&&&&& \sigma_b^2 && \\ &&&&&&&& \sigma_b^2 \end{bmatrix}$$

```
G <- as.matrix(getME(mod, "Lambda") * sigma(mod)) ** 2
Z <- as.matrix(getME(mod,"Z"))
R <-  sigma(mod)**2 * diag(nrow(mydata))
```

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$$

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$$

TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{Zu} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}\left(\mathbf{X\beta}, \mathbf{V}\right)$$

```
V <- Z %*% G %*% t(Z) + R
```

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}' + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$

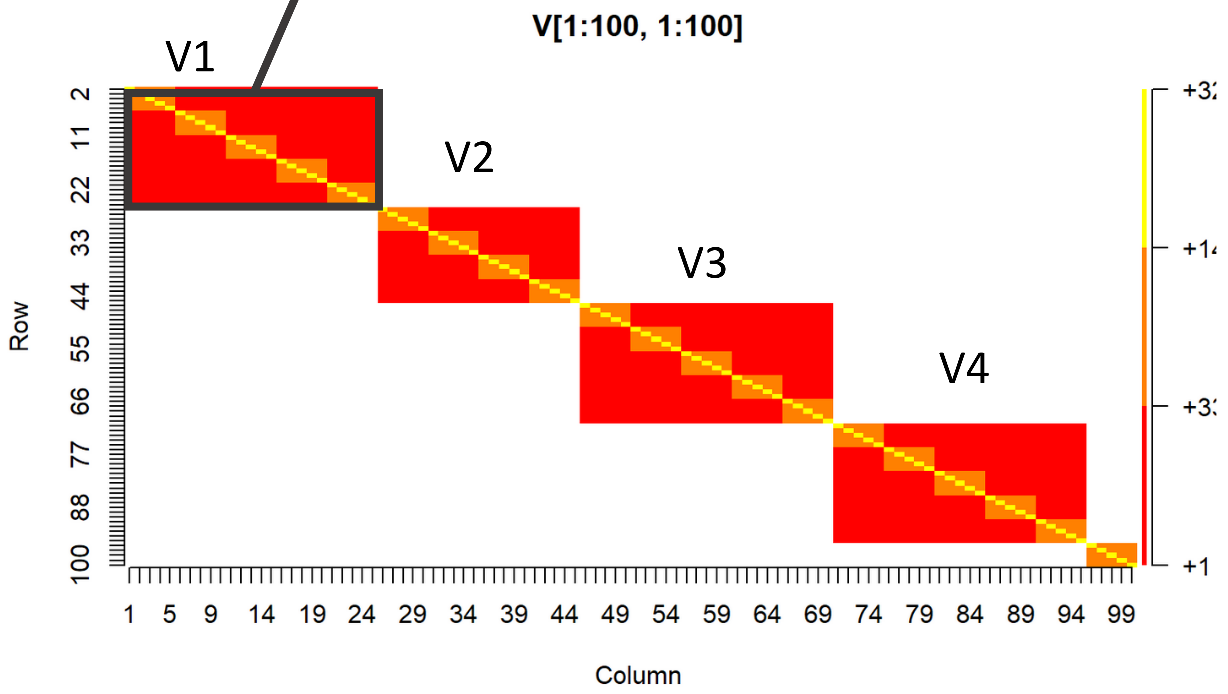
TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma^2 & \sigma_a^2+\sigma_b^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2+\sigma_b^2 & \sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma^2 & \sigma_a^2+\sigma_b^2 \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2+\sigma_b^2 & \sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma^2 \end{bmatrix}$$

$= \sigma_a^2+\sigma_b^2+\sigma^2$

$= \sigma_a^2+\sigma_b^2$

$= \sigma_a^2$



ATT. Au dessus, l'exemple est donnée pour deux réplication (2 enfants par père x mère),

En dessous il est donné pour 4 ou 5 réplication (en fonction du père et de la mère, car les données sont non balancées)

PLAN DES TRAVAUX PRATIQUES

TP1 – Modèles Linéaire Général (Rappel)

TP2 – Modèles hiérarchisés

TP3 – Modèles mixtes 1

TP4 – Puissance et réplication

TP5 – Modèles mixtes 2

TP6 – Choix de design et plans split plot

TP7 – Plans de criblage et plans factoriels fractionnaires

TP8 – Plans pour surface de réponse

MODELE MIXTE

$$Y_{ijk} = \underbrace{\boxed{\mu + \alpha_i}}_{\text{Partie fixe}} + \underbrace{\boxed{b_j + (\alpha b)_{ij} + \varepsilon_{ijk}}}_{\text{Partie aléatoire}} \quad i = 1,\ldots,a, \quad j = 1,\ldots,b \quad k = 1,\ldots,n$$

$b_i \sim i\,N(0,\sigma_b^2)$
$(\alpha b)_{ij} \sim i\,N(0,\sigma_{\alpha b}^2)$
$\varepsilon_{ijk} \sim i\,N(0,\sigma^2)$

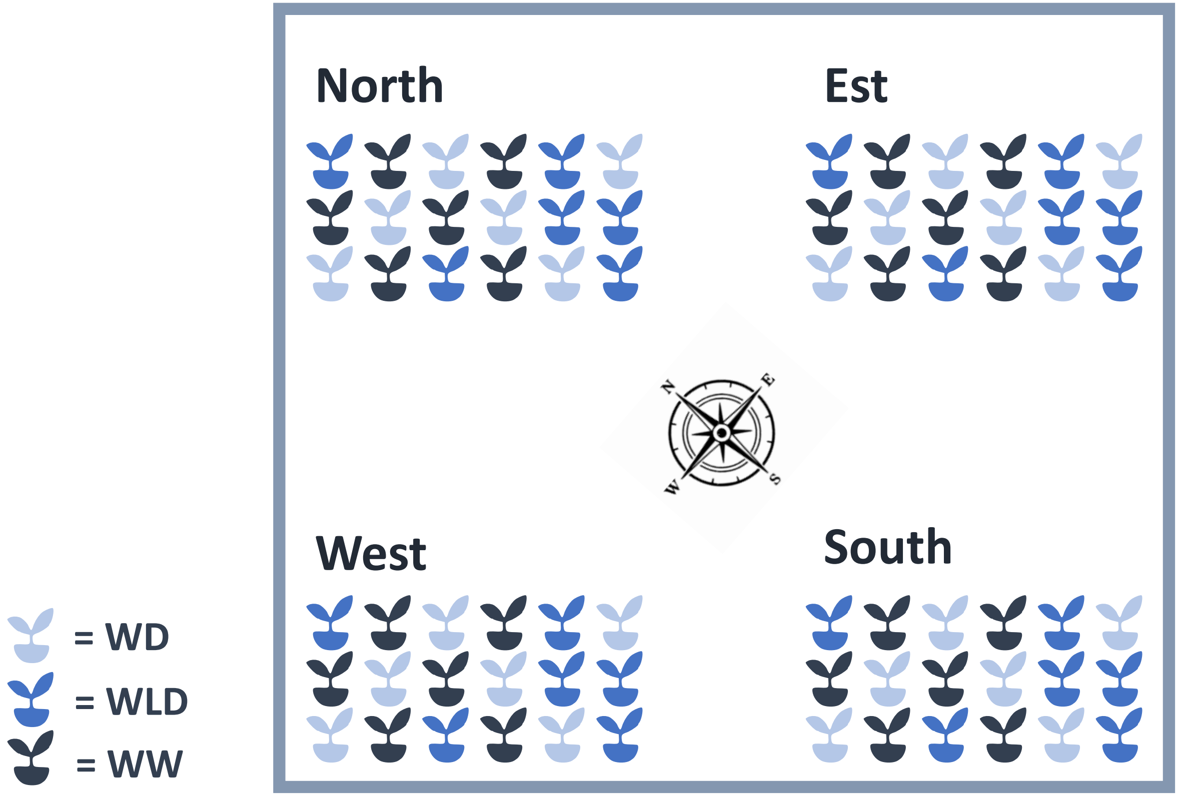
ECRITURE MATRICIELLE

$$\mathbf{Y} = \underbrace{\mathbf{X\beta}}_{\mu + \alpha_i} + \underbrace{\mathbf{Zu}}_{b_j + (\alpha b)_{ij}} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad \mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$

$\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{G})$

TP3 – cas d'étude



MODELE MIXTE

INFÉRENCE SUR LES EFFETS FIXES ET ALÉATOIRES

Fixe — Aléatoire

$$\mathbf{L}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} = \mathbf{L}[\boxed{\mu \;\; \alpha_1 \;\; \alpha_2} \; \boxed{b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; \alpha b_{11} \;\; \alpha b_{21} \;\; \alpha b_{12} \;\; \alpha b_{22} \;\; \alpha b_{13} \;\; \alpha b_{23}}]'$$

DANS R, lmertest::contest()

Uniquement Fixe

$$\mathbf{L}\,[\beta] = \mathbf{L}\,\boxed{[\mu+\alpha_2 \quad \alpha_1 - \alpha_2]'}$$

EXEMPLE DANS R,

avec un facteur fixe **'α'** à 3 niveaux

<u>si on test $\alpha_1 = \alpha_2$</u>

$$L\,[\beta] = L\,[\mu+\alpha_3 \quad \alpha_1-\alpha_3 \quad \alpha_2-\alpha_3\,]$$

$$L = [0 \;\; 1 \;\; -1] \text{ revient à tester } (\alpha_1-\alpha_3) - (\alpha_2-\alpha_3) \overset{?}{=} 0 \Leftrightarrow \alpha_1 \overset{?}{=} \alpha_2$$