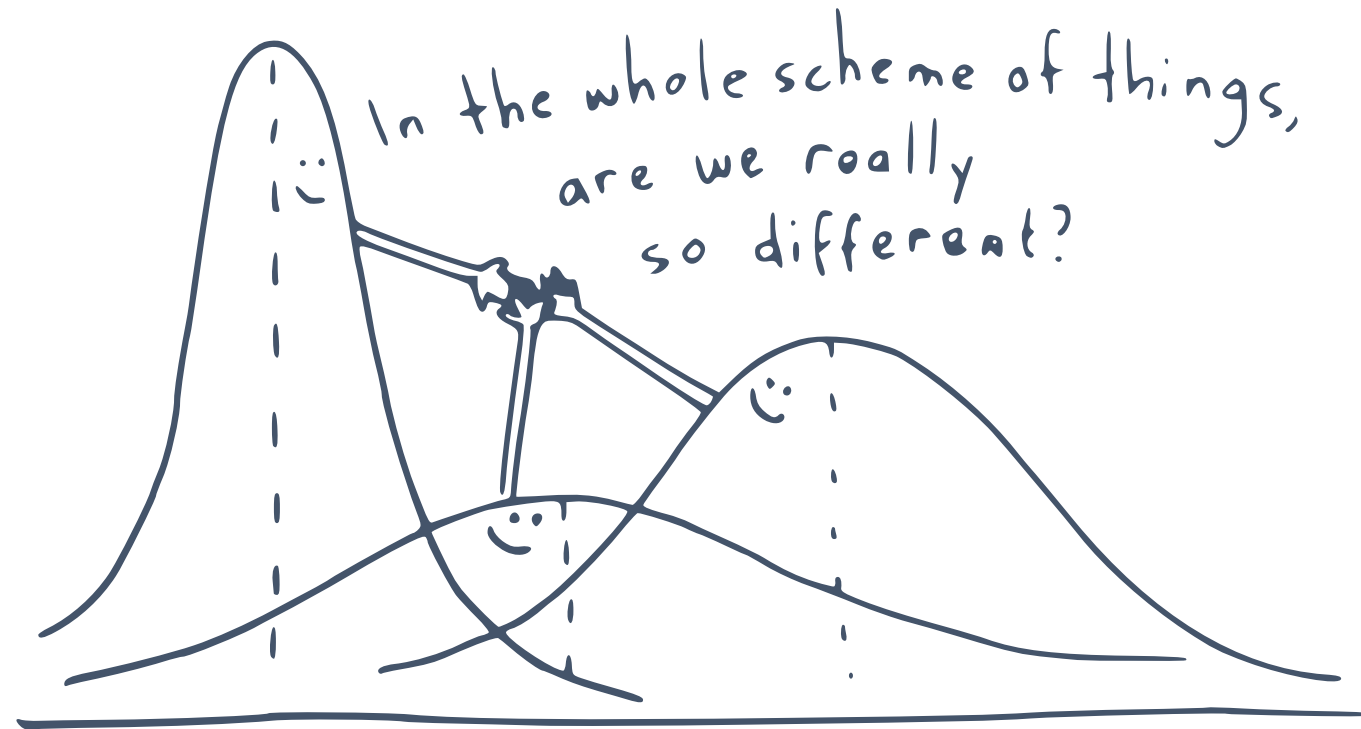


TP LBRAI2222 – Compléments de biométrie et plans expérimentaux



PLAN DES TRAVAUX PRATIQUES

TP1 – Modèles Linéaire Général (Rappel)

TP2 – Modèles hiérarchisés

TP3 – Modèles mixtes 1

TP4 – Puissance et réplication

TP5 – Modèles mixtes 2

TP6 – Choix de design et plans split plot

TP7 – Plans de criblage et plans factoriels fractionnaires

TP8 – Plans pour surface de réponse

TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

LE FACTEUR B EST HIÉRARCHISÉ AU FACTEUR A

$$Y_{ijk} = \overset{\text{Fixe}}{\mu} + \overset{\text{Aléatoire}}{a_i + b_{j(i)} + \varepsilon_{ijk}}$$

Deux facteurs hiérarchisés

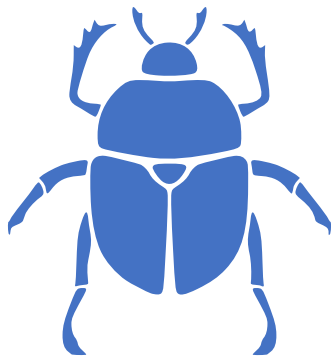
HYPOTHÈSES

$$\begin{aligned} a_i &\sim i N(0, \sigma_a^2) \\ b_{j(i)} &\sim i N(0, \sigma_b^2) \\ \varepsilon_{ijk} &\sim i N(0, \sigma^2) \end{aligned}$$

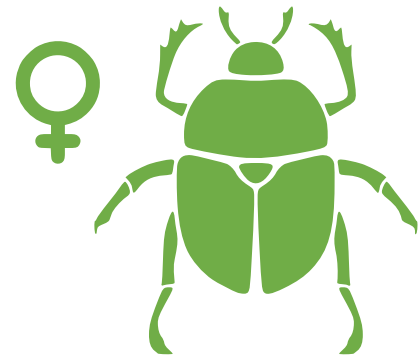
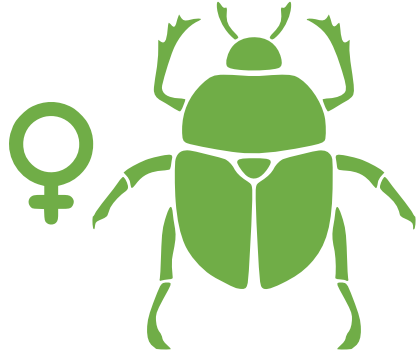
Facteur A	Facteur B					
	B1	B2	B3	B4	B5	B6
A1	1(1)	2(1)	/	/	/	/
A2	/	/	1(2)	2(2)	/	/
A3	/	/	/	/	1(3)	2(3)

TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

SIRE

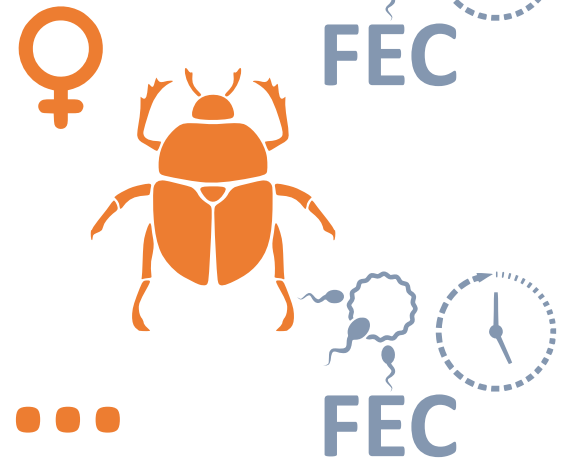
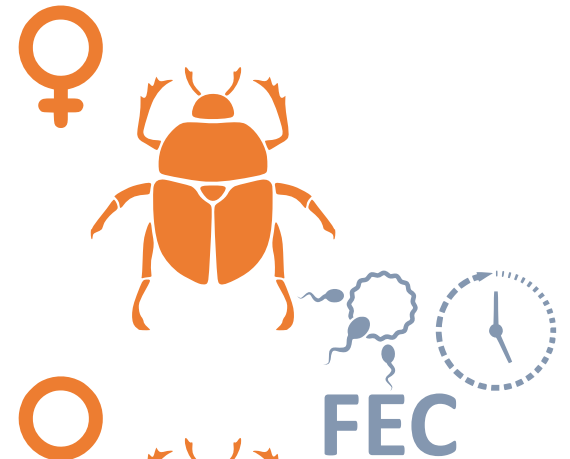
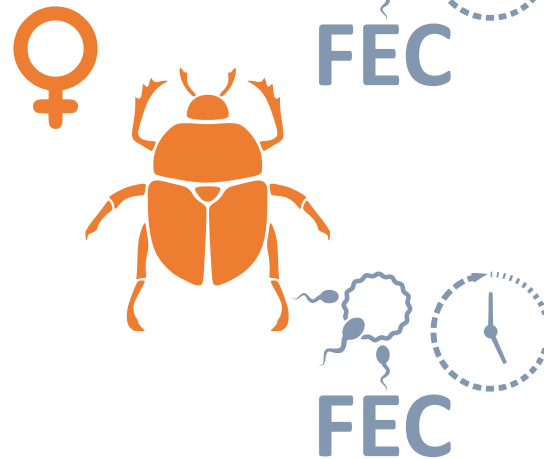
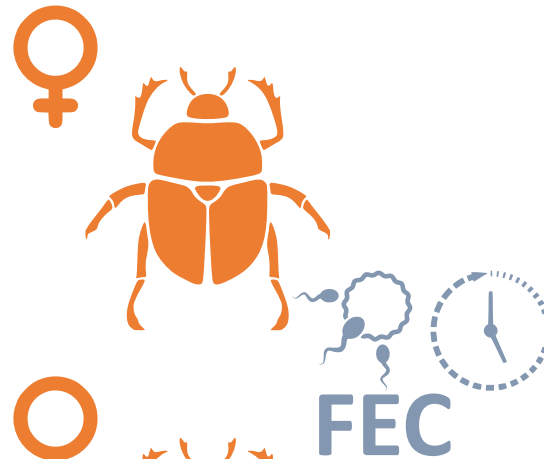


DAM



...

PROGENY



...

TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

ÉCRITURE MATRICIELLE

Ex. si **3 pères** croisés avec **2 mères différentes** (par père) :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ \vdots \\ Y_{311} \\ Y_{312} \\ Y_{321} \\ Y_{322} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mu \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_{1(1)} \\ b_{2(1)} \\ b_{1(2)} \\ b_{2(2)} \\ b_{1(3)} \\ b_{2(3)} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \vdots \\ \varepsilon_{311} \\ \varepsilon_{312} \\ \varepsilon_{321} \\ \varepsilon_{322} \end{bmatrix} = \mathbf{X}_{GLM} \boldsymbol{\beta}_{GLM} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

ATT : Différent dans R

TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

ÉCRITURE MATRICIELLE Ex. si 3 pères croisés avec 2 mères différentes (par père) :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{111} \\ Y_{112} \\ Y_{121} \\ Y_{122} \\ Y_{211} \\ Y_{212} \\ Y_{221} \\ Y_{222} \\ Y_{311} \\ Y_{312} \\ Y_{321} \\ Y_{322} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \times \underbrace{\mu}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & & & & & & \\ 1 & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & & & & 1 & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_{1(1)} \\ b_{2(1)} \\ b_{1(2)} \\ b_{2(2)} \\ b_{1(3)} \\ b_{2(3)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{211} \\ \varepsilon_{212} \\ \varepsilon_{221} \\ \varepsilon_{222} \\ \varepsilon_{311} \\ \varepsilon_{312} \\ \varepsilon_{321} \\ \varepsilon_{322} \end{bmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$
 $\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{G})$

ATT : Différent dans R

TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{G})$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & & & & & & \\ & \sigma_a^2 & & & & & \\ & & \sigma_a^2 & & & & \\ & & & \sigma_b^2 & & & \\ & & & & \sigma_b^2 & & \\ & & & & & \sigma_b^2 & \\ & & & & & & \sigma_b^2 \\ & & & & & & & \sigma_b^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad \mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$$

TP2 – MODÈLES HIÉRARCHISÉS

MATRICES VARIANCES-COVARIANCES : $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\mathbf{Y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V}) \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{G}\mathbf{Z}' + \mathbf{R} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 \\ \sigma_a^2 & \sigma_a^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 & \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma^2 \end{bmatrix}$$