Cours préparatoires au master en sciences informatiques

Produit scalaire, norme et distance

Stéphanie Guérit
École polytechnique de Louvain (UCLouvain)

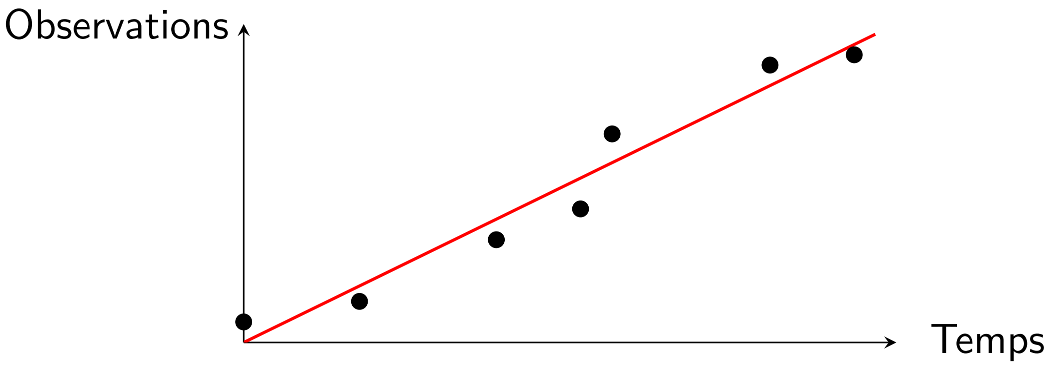
11 septembre 2023

Feedback INGInious et exercices
du notebook sur les matrices

Des questions ?

Motivation : exemple de régression linéaire

Suite à une expérience, vous obtenez les observations reprises sur le graphe ci-dessous.

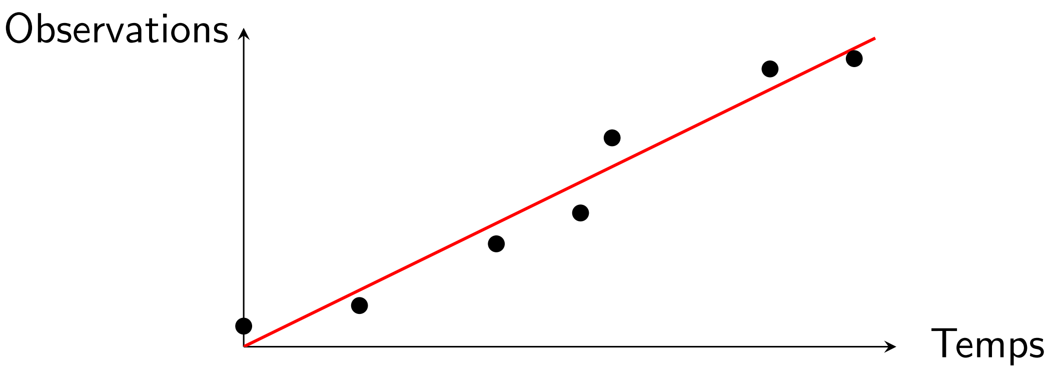


Comment trouver la droite qui approche le mieux ces observations (modèle théorique linéaire) ?

La droite de régression est telle que la somme des **distances** (au carré) entre chaque observation et la droite est minimale.

Motivation : exemple de régression linéaire

Suite à une expérience, vous obtenez les observations reprises sur le graphe ci-dessous.



Calculer une distance ? ⟷

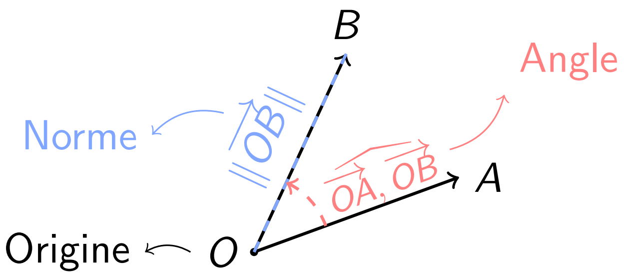
- Plan euclidien : facile !
- Mais si les données sont des polynômes, des vecteurs ou matrices, etc. ? On fait appel à la notion de **produit scalaire**.

Longueurs et angles dans le plan euclidien

Dans le plan euclidien, on peut mesurer

- des longueurs ;
- des angles.

Considérons les vecteurs du plan liés à l'origine, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



Cela permet de définir le (co)sinus d'un angle, des distances, d'utiliser des théorèmes (Pythagore, Thalès, ...), etc.

Le produit scalaire lie normes et angles

Le **produit scalaire** lie les concepts de norme et d'angle. Cette **opération** entre deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est définie comme

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OB}\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right).$$

si aucun des deux vecteurs n'est nul. Sinon, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

Inversement, on retrouve norme et angle à partir du produit scalaire :

- $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}}$,
- $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OB}\|}$.

Propriétés du produit scalaire

Propriétés fondamentales du produit scalaire :

- symétrie : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$
- positivité : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} \geq 0$
- bilinéarité : $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

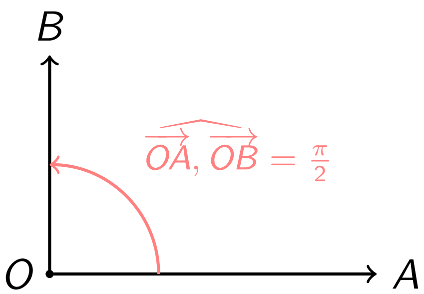
  $\overrightarrow{OA} \cdot (\lambda \overrightarrow{OB}) = \lambda(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})$

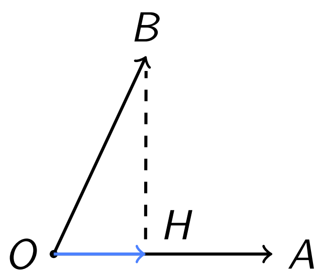
Propriétés du produit scalaire

Autres propriétés en lien avec des aspects géométriques :

- orthogonalité : deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. On écrit $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$
- projection orthogonale : si H est la projection orthogonale de B sur la droite OA, alors

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \pm \|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OH}\|.$$

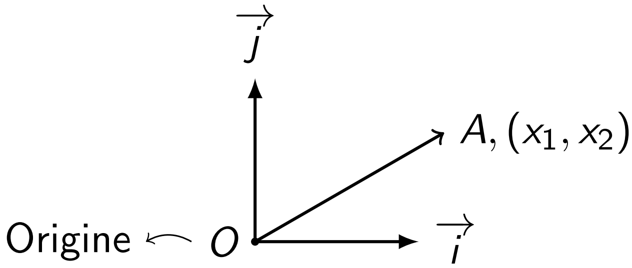




Calcul du produit scalaire en pratique

On munit le plan euclidien d'un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux ;
- $\vec{i}$ et $\vec{i}$ ont une norme égale à 1.



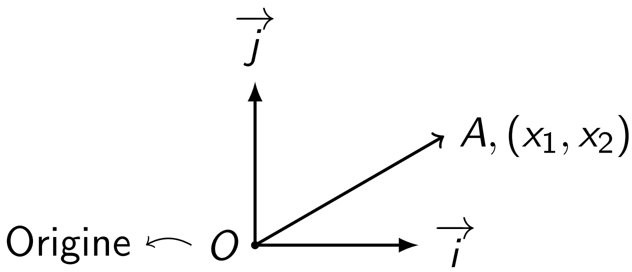
Tout vecteur $\overrightarrow{OA}$ est déterminé par ses **coordonnées** $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ dans le repère,

$$\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j}.$$

Calcul du produit scalaire en pratique

On munit le plan euclidien d'un repère **orthonormé** $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux ;
- $\vec{i}$ et $\vec{i}$ ont une norme égale à 1.



Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2), alors leur produit scalaire s'écrit

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Peut-on généraliser le concept de produit scalaire à d'autres espaces, par exemple l'espace des polynômes ou celui des matrices ?

Et dans d'autres espaces ?

Soit E un espace *vectoriel*[1] sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur E est une application

$$(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R} : x, y \mapsto (x|y)$$

qui est (voir slide **??**) :

- symétrique : pour $x, y \in E$, $(x|y) = (y|x)$
- définie positive : pour $x \in E$, $x \neq 0$, $(x|x) > 0$.
- bilinéaire : pour $x, y, z \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda x + \mu y|z) = \lambda(x|z) + \mu(y|z)$$
$$(x|\lambda y + \mu z) = \lambda(x|y) + \mu(x|z)$$

On dit alors que E muni de $(\cdot|\cdot)$ est un **espace euclidien**.

[1] On ne s'attardera pas ici sur cette notion...

Exemples d'espaces euclidiens

- $E = \mathbb{R}^n$: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{y}.$$

- $E = \mathbb{R}^{2\times 2}$: $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$,

$$(A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B).$$

- $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$: $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues,

$$(f|g) = \int_0^1 f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Géométrie euclidienne : norme et angle

Soit $E, (\cdot|\cdot)$ un espace euclidien. La **norme euclidienne** d'un élément x de E se définit comme suit (voir slide **??**) :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$

Propriétés fondamentales d'une norme :

- définie positive : pour $x \in E$, $x \neq 0$, $\|x\| > 0$
- homogénéité : pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- inégalité triangulaire : pour $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

⚠ Toutes les normes ne proviennent pas nécessairement d'un produit scalaire !

Dans un espace euclidien $E, (\cdot|\cdot)$, deux vecteurs x et y sont dits orthogonaux si
$$(x|y) = 0.$$

Théorème de Pythagore : pour $x, y \in E$, si x et y sont orthogonaux,
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Distance entre deux vecteurs : la distance entre x et y est donnée par $\|x - y\|$.

Pause (10 min)

Application 2 : clustering

Implémentons l'algorithme k-means...

... rendez-vous sur Moodle pour télécharger le notebook jupyter `2023_09_11_clustering`.

Le programme de cette semaine...

Jeudi 7 septembre :	introduction au calcul matriciel application 1 : systèmes d'équations linéaires
Lundi 11 septembre :	norme et distance application 2 : clustering (implémentation de l'algorithme k-means)
Mardi 12 septembre :	application 3 : systèmes dynamiques linéaires (implémentation du modèle SIR)
Mercr. 13 septembre :	méthode des moindres carrés application 4 : classification (2 classes)