Cours préparatoires au master en sciences informatiques

Introduction au calcul matriciel et aux systèmes d'équations linéaires

Pierre-Yves Gousenbourger et Stéphanie Guérit
École polytechnique de Louvain (UCLouvain)

07 septembre 2023

Ce jeudi 7 septembre

Pourquoi les systèmes linéaires, c'est cool et dur à la fois ?

Résolvons ensemble ce problème de régression.

Reprenons le notebook jupyter
`2023_09_07_fonctions_multivariees_01`.

Matrices, systèmes linéaires, régressions : tout est lié !

Qu'est-ce qu'une matrice ?

Une matrice est un tableau rectangulaire dont chaque entrée est un nombre réel (ou complexe).

Exemple 1 : distance entre des villes

	Boston	New York	Washington	Miami
Boston	0	206	429	1504
New York	206	0	233	1308
Washington	429	233	0	1075
Miami	1504	1308	1075	0

Qu'est-ce qu'une matrice ?

Une matrice est un tableau rectangulaire dont chaque entrée est un nombre réel (ou complexe).

Exemple 2 : systèmes de recommandation

	Harry Potter	Star Wars	LoR	Roi Lion	Forrest Gump
Arthur	3	?	2	?	1
Cédric	?	?	3	?	5
Dimitri	?	?	4	?	5
Pierre-Yves	2	5	5	?	?
Stéphanie	1	?	?	4	?
Vincent	5	4	?	?	?

Définition d'une matrice

Définition (Matrice)

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ est un tableau rectangulaire composé de p lignes et n colonnes,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p1} & & & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

L'élément a_{ij} est celui situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

❗ On notera aussi $A_{p \times n}$ pour $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$.

Matrices avec des propriétés spécifiques

Quelle propriété possède la matrice suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le nombre de lignes est le même que le nombre de colonnes.

Matrice carrée

Matrices avec des propriétés spécifiques

Quelle propriété possède la matrice **carrée** suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La colonne i est identique à la ligne i. On a $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrice symétrique

Axe de symétrie : diagonale principale

Matrices avec des propriétés spécifiques

Quelle propriété possède la matrice **carrée** suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs sous la diagonale principale sont nulles.

Matrice triangulaire supérieure

Matrices avec des propriétés spécifiques

Quelle propriété possède la matrice **carrée** suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs au-dessus de la diagonale principale sont nulles.

Matrice triangulaire inférieure

Matrices avec des propriétés spécifiques

Quelles propriétés possède la matrice **carrée** suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs hors de la diagonale principale sont nulles.

Matrice diagonale

Matrices avec des propriétés spécifiques

Quelles propriétés possède la matrice **carrée** suivante ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice est diagonale avec uniquement des 1 sur celle-ci.

Matrice identité

Matrices **carrées** avec des propriétés spécifiques

Matrice symétrique : $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$

Triangulaire supérieure ou inférieure : $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$

Matrice diagonale : $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

dont la matrice identité I : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercez-vous !

Rendez-vous sur Moodle pour télécharger le notebook jupyter `2023_09_07_matrices`.

Comment manipuler ces matrices ?

Les deux opérations de base sont l'**addition** et la **multiplication matricielles**.

Opérations sur les matrices : addition

On peut additionner des matrices **de mêmes dimensions**.

$$A + B = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p1} & & & a_{pn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{p1} & & & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} + b_{11}} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p1} + b_{p1} & & & a_{pn} + b_{pn} \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices : addition

On peut additionner des matrices **de mêmes dimensions**.

Remarque (Multiplication par un scalaire)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $\alpha A = A + A + \dots + A$ (α termes) et donc

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Ceci se généralise pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriétés de l'addition de matrices :

- Commutativité : $A + B = B + A$
- Associativité : $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Élément neutre : $A_{p\times n} + 0_{p\times n} = A$

Opérations sur les matrices : produit matriciel

On peut multiplier deux matrices A et B ssi **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**.

On a : $c_{ij} = A_{i*} \cdot B_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p1} & & & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{p1} & & & c_{pm} \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices : produit matriciel

On peut multiplier deux matrices A et B ssi **le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B**.

On a : $c_{ij} = A_{i*} \cdot B_{*j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p1} & & & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{p1} & & & c_{pm} \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices : produit matriciel

Propriétés de la multiplication matricielle :

- Associativité : $A(BC) = (AB)C$
- Distributivité par rapport à l'addition : $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$
- Élément neutre : $A_{p\times n}I_n = A$, $I_pA_{p\times n} = A$

❗ Contrairement au produit de nombres réels, on a

- $AB \neq BA$
- $AB = 0 \;\not\Rightarrow\; A = 0$ ou $B = 0$
- $AB = AC$ avec $A \neq 0 \;\not\Rightarrow\; B = C$

Exercez-vous !

Rendez-vous sur Moodle pour continuer le notebook jupyter `2023_09_07_matrices`.

Transposée d'une matrice

Définition (Matrice transposée)

La **matrice transposée** *de $A_{p\times n}$, notée $A^\top_{n\times p}$, est une matrice dont les colonnes correspondent aux lignes de A :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{p1} & & & a_{pn} \end{pmatrix}, \quad A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les transposées des matrices suivantes ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Inverse d'une matrice

Définition (Matrice inverse)

Soit $A_{n\times n}$ une matrice carrée. A est **inversible** *s'il existe $B_{n\times n}$ telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

B est appelée **matrice inverse** *de A et est notée A^{-1}.*

Théorème

L'inverse d'une matrice est unique.

Exemple : Inverse de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Inverse d'une matrice

Propriétés de l'inverse :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ avec $B_{n\times n}$ inversible
- Si A^{-1} existe et A est symétrique, alors A^{-1} est aussi symétrique.

❗ Seules les matrices **carrées** sont éventuellement inversibles. Les matrices rectangulaires peuvent avoir des inverses *à gauche* et/ou *à droite*, de tailles différentes et pas forcément uniques.

Inverse d'une matrice : cas particuliers

- Si A est diagonale, A est inversible ssi aucun élément diagonal n'est nul.

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

- Si A est triangulaire supérieure (ou inférieure), A est inversible ssi aucun élément diagonal n'est nul.
- Si A est diagonalement dominante, c'est-à-dire, $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$, alors A est inversible.

Exercez-vous !

Rendez-vous sur Moodle pour continuer le notebook jupyter `2023_09_07_matrices`.

Application 1 : les systèmes d'équations linéaires

Trois équations et trois inconnues (x, y et z) :

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 3x + y + z & = 0 \\ -2x + y - 3z & = 2 \end{cases}$$

Première méthode de résolution : "à la main".

Application 1 : les systèmes d'équations linéaires

Trois équations et trois inconnues (x, y et z) :

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 3x + y + z & = 0 \\ -2x + y - 3z & = 2 \end{cases}$$

Deuxième méthode de résolution : via le **calcul matriciel**.

Écriture du système sous forme matricielle :

$$Ax = b$$

Application 1 : les systèmes d'équations linéaires

Trois équations et trois inconnues (x, y et z) :

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 3x + y + z & = 0 \\ -2x + y - 3z & = 2 \end{cases}$$

Deuxième méthode de résolution : via le **calcul matriciel**.

Écriture du système sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

Application 1 : les systèmes d'équations linéaires

Trois équations et trois inconnues (x, y et z) :

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 3x + y + z & = 0 \\ -2x + y - 3z & = 2 \end{cases}$$

Deuxième méthode de résolution : via le **calcul matriciel**.

Écriture du système sous forme matricielle :

$$x = A^{-1}b$$

Si A est inversible, la solution est unique. Mais calculer A^{-1} coûte trop cher. On utilisera plutôt un solver, comme

```
x = numpy.linalg.solve(A,b)
```


Application 1 : les systèmes d'équations linéaires

Trois équations et trois inconnues (x, y et z) :

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 1 \\ 3x + y + z & = 0 \\ -2x + y - 3z & = 2 \end{cases}$$

Deuxième méthode de résolution : via le **calcul matriciel**.

Écriture du système sous forme matricielle :

$$Ax = b$$

Si A n'est pas inversible, comment caractériser ce système et ses éventuelles solutions ?

Exercez-vous !

Rendez-vous sur Moodle pour télécharger le notebook jupyter `2023_09_07_systemes`.

Exercez-vous d'ici dimanche :-)

Quiz sur INGInious

Réalisez le quiz sur le calcul matriciel avant le 11/09 à 8h.

https://inginious.org/course/prepa-master/CM_quiz

Le programme de la semaine prochaine...

Jeudi 7 septembre :	introduction au calcul matriciel application 1 : systèmes d'équations linéaires
Lundi 11 septembre :	norme et distance application 2 : clustering (implémentation de l'algorithme *k*-means)
Mardi 12 septembre :	application 3 : systèmes dynamiques linéaires (implémentation du modèle SIR)
Mercr. 13 septembre :	méthode des moindres carrés application 4 : classification (2 classes)