Cours préparatoires au master en sciences informatiques

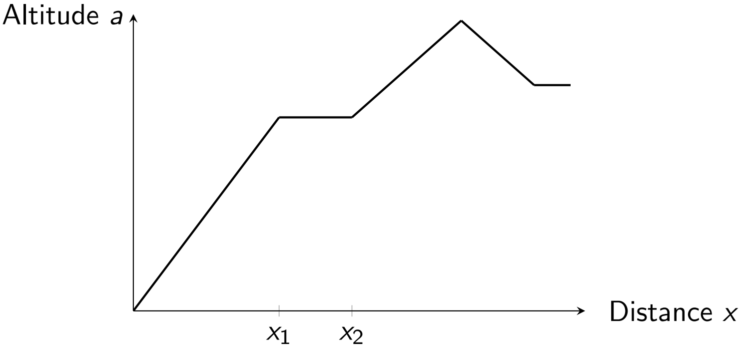
Analyse univariée : dérivées

Pierre-Yves Gousenbourger
École polytechnique de Louvain (UCLouvain)
Slides authentiques : Stéphanie Guérit

4 septembre 2023

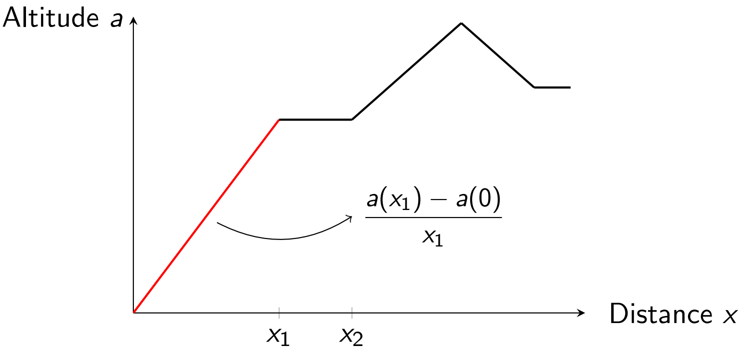
Randonnée en montagne

"Quel est le taux **moyen** de variation de l'altitude sur chaque tronçon ?" se demande un sportif pour gérer son effort.



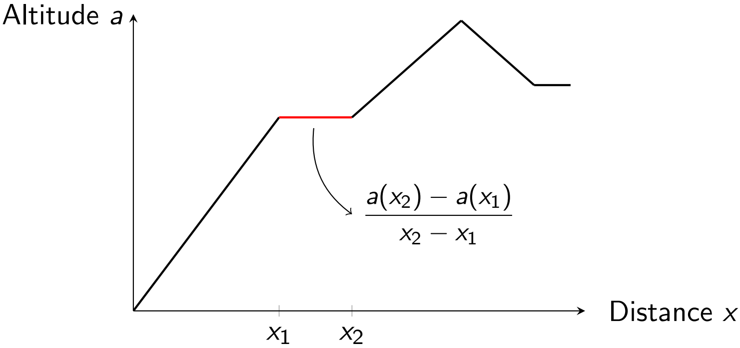
Randonnée en montagne

"Quel est le taux **moyen** de variation de l'altitude sur chaque tronçon ?" se demande un sportif pour gérer son effort.



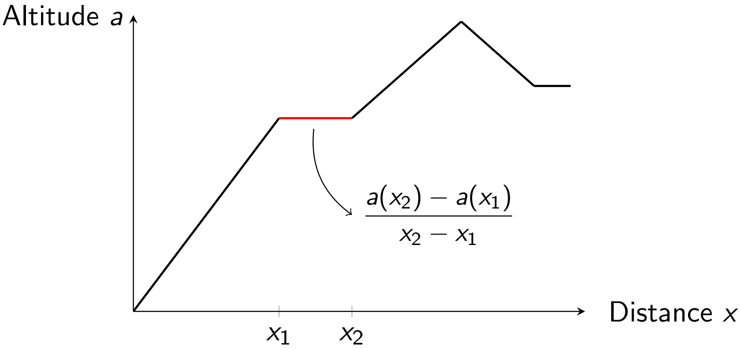
Randonnée en montagne

"Quel est le taux **moyen** de variation de l'altitude sur chaque tronçon ?" se demande un sportif pour gérer son effort.



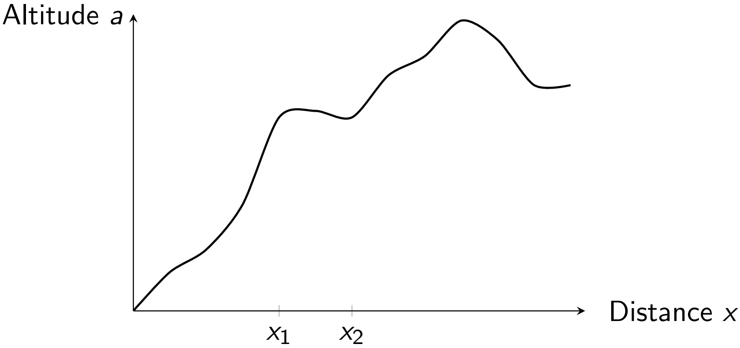
Randonnée en montagne

Le taux moyen de variation de l'altitude sur chaque tronçon correspond à la **pente** de ce tronçon (voir fonctions affines).



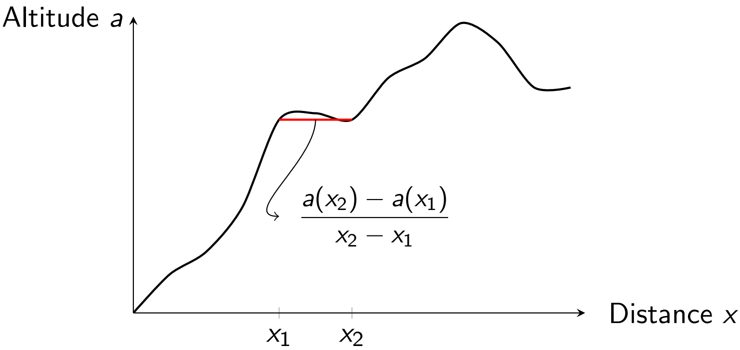
Randonnée en montagne

En pratique, le profil d'altitude est un peu plus complexe !
On peut encore calculer des taux moyens de variation...



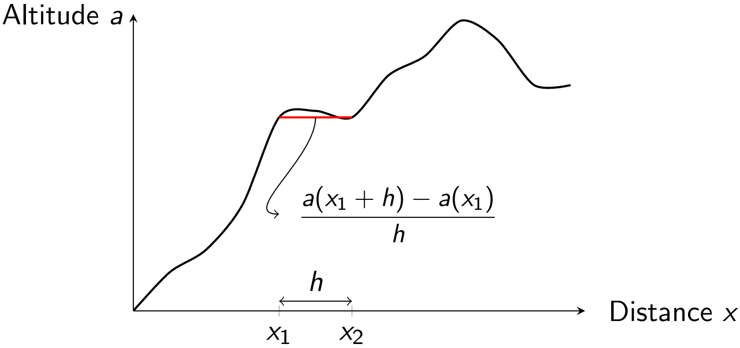
Randonnée en montagne

En pratique, le profil d'altitude est un peu plus complexe !
On peut encore calculer des taux moyens de variation...

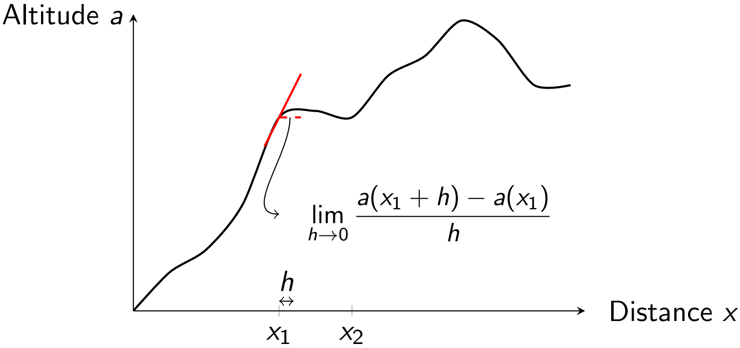


Randonnée en montagne

En pratique, le profil d'altitude est un peu plus complexe !
On peut encore calculer des taux moyens de variation...



Le taux **instantané** de variation est obtenu lorsque $h \to 0$.
Il correspond à la **pente** de la droite tangente au graphe en x_1.



Taux instantané de variation

Quelques exemples concrets :

y	x	**Taux instantané de variation de y avec x**
hauteur	espace	pente
espace	temps	
vitesse	temps	
énergie	temps	
charge électrique	temps	
naissances	temps	
volume	temps	
$f(x)$	x	pente de la tangente à la fonction f en x

Taux instantané de variation

Quelques exemples concrets :

y	x	**Taux instantané de variation de y avec x**
hauteur	espace	pente
espace	temps	vitesse
vitesse	temps	accélération
énergie	temps	puissance
charge électrique	temps	intensité de courant
naissances	temps	taux de natalité
volume	temps	débit
$f(x)$	x	pente de la tangente à la fonction f en x

Taux instantané de variation

Quelques exemples concrets :

$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{x}$	**Taux instantané de variation de $\boldsymbol{y}$ avec $\boldsymbol{x}$**
hauteur	espace	pente
espace	temps	vitesse
vitesse	temps	accélération
énergie	temps	puissance
charge électrique	temps	intensité de courant
naissances	temps	taux de natalité
volume	temps	débit
$f(x)$	x	pente de la tangente à la fonction f en x

Exercice 3.1

Sommaire

Définition et existence de la dérivée

Définition (Nombre dérivé de f en a)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur A et a un point de A. La fonction f est dérivable au point a si la limite

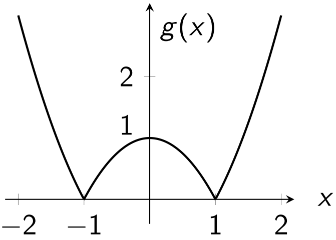
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

existe. Cette limite est le **nombre dérivé de f en a**.

Condition nécessaire (mais pas suffisante) pour l'existence de la limite : f doit être *continue* en a.

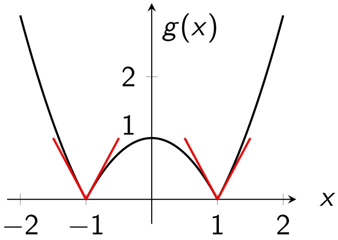
Définition et existence de la dérivée

Condition nécessaire (mais **pas suffisante**) pour l'existence de la limite : f doit être *continue* en a.



g est continue mais pas dérivable en -1 et 1

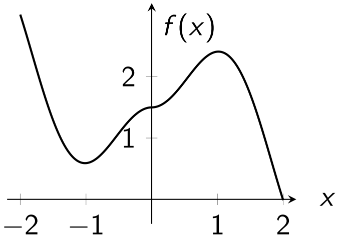
Condition nécessaire (mais **pas suffisante**) pour l'existence de la limite : f doit être *continue* en a.



g est continue mais pas dérivable en -1 et 1 : les limites à gauche et les limites à droite sont différentes.

Définition et existence de la dérivée

Condition nécessaire (mais **pas suffisante**) pour l'existence de la limite : f doit être *continue* en a.



Intuitivement, une condition suffisante est que f soit *lisse*.

Définition et existence de la dérivée

Définition (Fonction dérivée de f)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A. Si f est dérivable en tous les points de son domaine, on dit que f est dérivable et on définit la **fonction dérivée**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$$

qui associe à x son nombre dérivé.

La dérivée d'ordre n d'une fonction est notée $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$.

Définition (Fonction dérivée de f)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur A. Si f est dérivable en tous les points de son domaine, on dit que f est dérivable et on définit la **fonction dérivée**

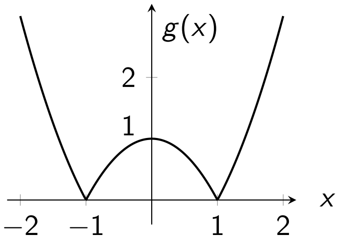
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$$

qui associe à x son nombre dérivé.

Si f est dérivable seulement sur un sous-ensemble $B \subset A$, on dira que f est dérivable sur B.

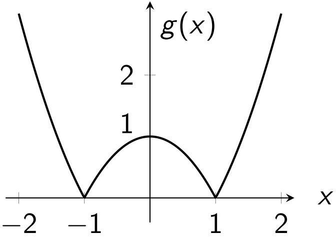
Définition et existence de la dérivée

Si f est dérivable seulement sur un sous-ensemble $B \subset A$, on dira que f est dérivable sur B.



Définition et existence de la dérivée

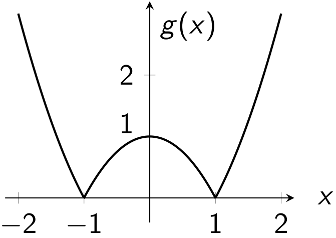
Si f est dérivable seulement sur un sous-ensemble $B \subset A$, on dira que f est dérivable sur B.



Le domaine de g est $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Définition et existence de la dérivée

Si f est dérivable seulement sur un sous-ensemble $B \subset A$, on dira que f est dérivable sur B.



Le domaine de g est $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Exemple : $h(t) = \sqrt{t}$

Dérivées élémentaires

	$f(x)$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$	
Fonction affine	$mx + p$	m	$m, p \in \mathbb{R}$
Fonction puissance	x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$
Fonctions trigonométriques			
Sinus	$\sin x$	$\cos x$	
Cosinus	$\cos x$	$-\sin x$	
Tangente	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
Fonction exponentielle	e^x	e^x	
Fonction logarithme	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$

Pause (15 min)

Entraînement sur INGInious

Réaliser les exercices de la tâche *Dérivées élémentaires*

https://inginious.org/course/prepa-master/derivees01

Et si les fonctions élémentaires sont combinées ?

Et si les fonctions élémentaires sont combinées ?

On va voir quelques techniques pour se simplifier la vie...

Proposition (Dérivée d'une somme)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions dérivables en $a \in A$ et c_1, c_2 deux constantes réelles. Alors, la fonction $c_1 f + c_2 g$ est dérivable en a et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(c_1 f + c_2 g)(a) = c_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(a) + c_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(a).$$

Exemple : $x^3 + 2x^2 - 2$

Exercices 3.2(d) et 3.2(h)

Techniques de dérivation

Proposition (Dérivée d'un produit)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions dérivables en $a \in A$. Alors, la fonction fg est dérivable en a et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(a)g(a) + f(a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(a).$$

Exemple : $3x^2 \ln x$

Exercice 3.3(b)

Techniques de dérivation

Proposition (Dérivée d'un quotient)

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions dérivables en $a \in A$. Alors, si $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(a)g(a) - f(a)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(a)}{g^2(a)}.$$

Exemple : $\dfrac{e^x}{2x^2 + x}$

Exercice 3.5(a)

Techniques de dérivation

Proposition (Dérivée d'une fonction composée)

Soit A, B, C *des sous-ensembles de* $\mathbb{R}$*.*
Soit $f : A \to B, x \mapsto f(x)$*, une fonction dérivable en* $x \in A$*, et* $g : B \to C, u \mapsto g(u)$*, une autre fonction dérivable en* $u = f(x)$*.*
Alors la fonction $g \circ f : A \to C, x \mapsto g(f(x))$ *est dérivable en* x *et*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} g(f(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x).$$

Exemple : $(\cos x)^3$

Exercices 3.5(c) et 3.5(h)

Techniques de dérivation

Proposition (Dérivée d'une fonction composée)

Soit A, B, C des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
Soit $f : A \to B, x \mapsto f(x)$, une fonction dérivable en $x \in A$, et $g : B \to C, u \mapsto g(u)$, une autre fonction dérivable en $u = f(x)$.
Alors la fonction $g \circ f : A \to C, x \mapsto g(f(x))$ est dérivable en x et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}g(f(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x).$$

Exemple : $(\cos x)^3$ $\qquad g(u) = u^3$ et $f(x) = \cos x$

Exercices 3.5(c) et 3.5(h)

À quoi servent les dérivées ?

À quoi servent les dérivées ?

- Caractérisation de la croissance de fonctions
- Recherche d'extrema d'une fonction
- Estimation locale d'une fonction par un polynôme
- Modélisation de phénomènes évolutifs
- Optimisation par descente de gradient
- etc.

Entraînement sur INGInious

Choisir 15 exercices à réaliser avant la séance du 07/09

`https://inginious.org/course/prepa-master`