Module 1

Fonctions univariées, dérivées élémentaires et techniques de dérivation

1.1 Fonctions univariées

Exercice 1.1* Donner le domaine des fonctions suivantes.

⋆ a) $g(x) = \sqrt{6 - x - x^2}$

⋆ b) $f(t) = \dfrac{1}{\cos t}$

c) $G(x) = \frac{1}{x^2+1}$

d) $h(\tau) = \ln(\tau + 3)$

e) $k(s) = (s^2 + 2s - 3)^{-1/2}$

f) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Exercice 1.2* Associer les fonctions représentées à la Figure 2.1 avec les expressions ci-dessous. Déterminer leur domaine ainsi que leur parité.

a) $\dfrac{1}{x^2}$

b) $x^2 + 2$

c) $(x - 2)^2$

d) $\dfrac{1}{x - 1}$

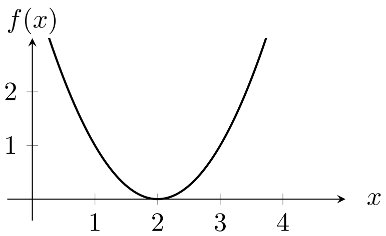
e) $-\dfrac{1}{x}$

f) $2x^3 + 1$

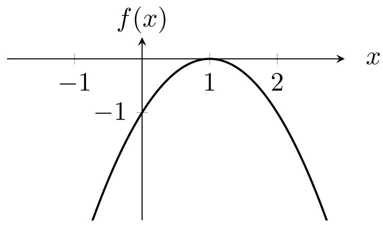
g) $(x + 1)^3$

h) $-x^2 + 2x - 1$

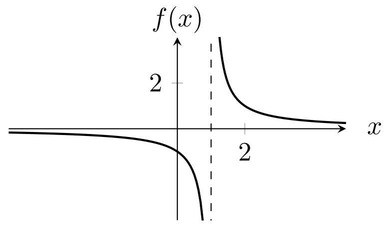
i) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



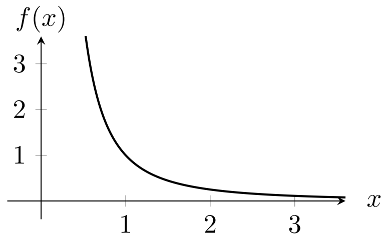
(a)



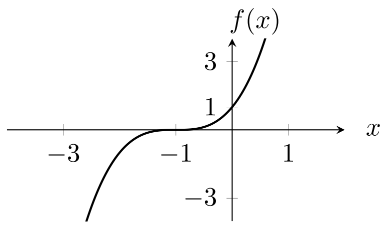
(b)



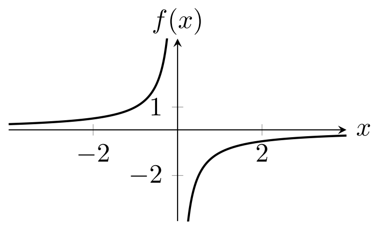
(c)



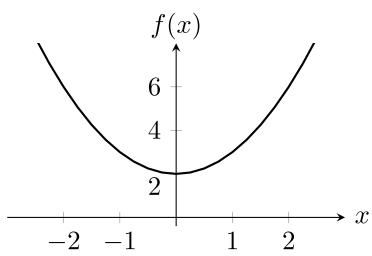
(d)



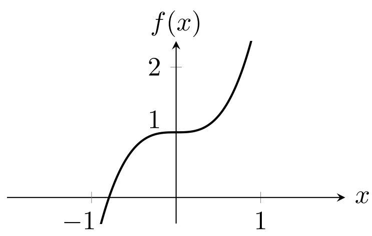
(e)



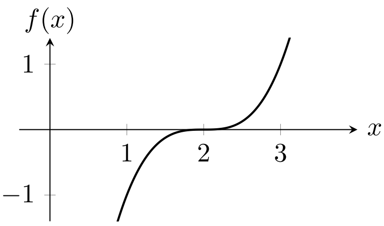
(f)



(g)



(h)



(i)

Figure 1.1 – Fonctions de l'exercice 2.2.*

Exercice 1.3 Trouver une fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ étant à la fois paire et impaire.

Exercice 1.4* En partant du graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$, dessiner le graphe des fonctions suivantes.

a) $g(x) = \dfrac{1}{x+3}$

b) $h(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

c) $k(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

Exercice 1.5 Tracer le graphe des fonctions suivantes.

a) $f(t) = \dfrac{1}{t-2}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{2x}$

c) $F(s) = \dfrac{2s-5}{s-3}$

Exercice 1.6* Pour les fonctions suivantes, calculer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

$\star$ a) $f(x) = 4 - x$, $\quad g(x) = -4x$

$\star$ b) $f(x) = \dfrac{x+3}{2}$, $\quad g(x) = \sqrt{1-x}$

c) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

1.2 Dérivées élémentaires et techniques de dérivation

Rappel

Définition de la dérivée [1]
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur A et a un point de A. La fonction f est dérivable au point a si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe. Cette limite est le *nombre dérivé* de f en a Si f est dérivable en tous les points de son domaine, on définit la *fonction dérivée* (ou *dérivée*) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ qui associe à x son nombre dérivé.

Dérivées de fonctions élémentaires

- Fonction affine : $f(x) = mx + p$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = m$ $\quad m, p \in \mathbb{R}$
- Fonction puissance : $f(x) = x^n$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = nx^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{R}$
- Fonctions trigonométriques : $f(x) = \sin x$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \cos x$
  $f(x) = \cos x$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = -\sin x$
  $f(x) = \tan x$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Fonction exponentielle : $f(x) = e^x$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = e^x$
- Fonction logarithme : $f(x) = \ln x$ $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad x > 0$

Techniques de dérivation
Soient f et g des fonctions dérivables sur leur domaine.

- Somme : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f+g)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$
- Multiplication par un scalaire : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cf)(x) = c\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ $\quad c \in \mathbb{R}$
- Produit : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg)(x) = g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) + f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$
- Quotient : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) - f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)}{g^2(x)}$ $\quad g(x) \neq 0$
- Composée de fonctions : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}g(f(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

1.3 Dérivées élémentaires

Exercice 1.7* Apparier les fonctions représentées à la Figure 2.2 avec les dérivées correspondantes.

Exercice 1.8* Calculer les dérivées des fonctions élémentaires suivantes en utilisant les propriétés de somme et de multiplication par un scalaire. Si le domaine de la fonction dérivée n'est pas l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, préciser le domaine. *Rappel :* $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ *et* $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$ *avec* $n \in \mathbb{R}_0$ *et* $p \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = 3x^2 - 8x + 3$

b) $F(t) = -\dfrac{4t^3}{3} + 2t^2 - 1$

c) $g(x) = \sqrt{x} - x^2$

$\star$ d) $g(t) = \sqrt{t^3}$

e) $h(x) = \dfrac{1}{x}$

f) $G(z) = \dfrac{3}{z^7}$

g) $h(t) = t^2 - 2\cos t$

$\star$ h) $F(x) = \sin x + 3e^x - 3x$

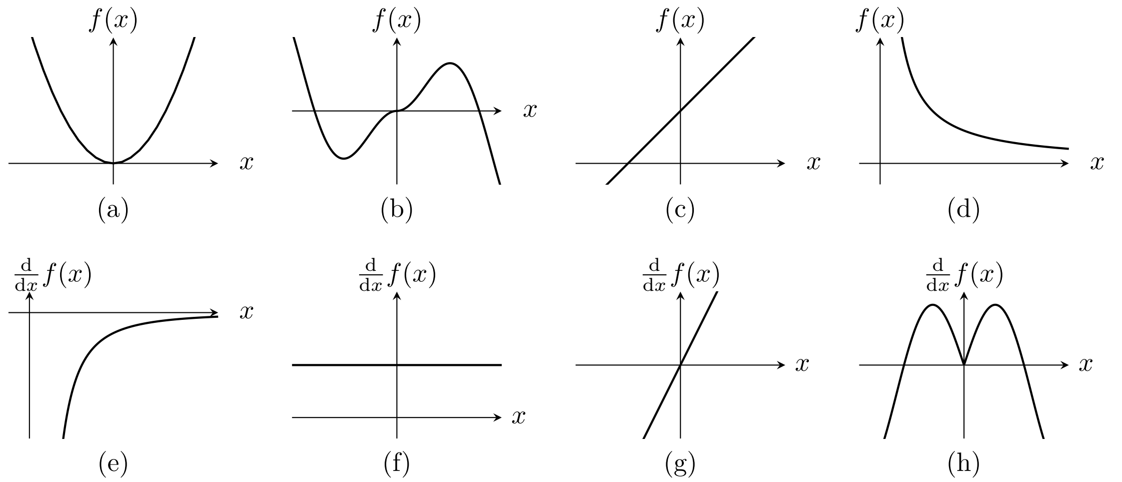


Figure 1.2 – Fonctions et fonctions dérivées de l'exercice 2.7*.

i) $g(z) = 4 \ln z + z^2 - \dfrac{1}{z^2}$

j) $h(x) = 2e^x + \tan x + 2 \sin x$

1.4 Techniques de dérivation

Exercice 1.9* Calculer la dérivée des fonctions suivantes avec la formule du produit (voir rappel de la séance). La calculer ensuite sans cette formule.

a) $f(x) = (x^2 + 2)(x - 1)$

⋆ b) $F(x) = (-\dfrac{x^3}{3} + x)(3x^2 + 2)$

c) $h(t) = (t + 1)(t - 3)(t + 2)$

Exercice 1.10 Soit $f(x) = x^2 + \cos x$. Calculer $f(2x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(2x))$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(2x)$.

Exercice 1.11* Calculer les dérivées des fonctions suivantes en utilisant les techniques de dérivation (voir rappel de la séance).

⋆ a) $g(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = e^x \sin x$

⋆ c) $H(t) = 2 \cos(2t)$

d) $G(t) = \cos(5t)$

e) $f(s) = \tan(2s + 3)$

f) $g(t) = t^2 \sqrt{t}$

g) $h(x) = \dfrac{1}{x^3 + x^2 + x}$

⋆ h) $G(z) = \ln(\tan z)$

i) $h(t) = \tan(\ln t)$

j) $F(x) = (x + 1)^8$

k) $g(x) = \sqrt[5]{x^2}$

l) $g(z) = 4 \ln(2z) + \dfrac{1}{\sqrt{z + 2}}$

Solutions du module 1

Fonctions univariées, dérivées élémentaires et techniques de dérivation

Solution 1.1

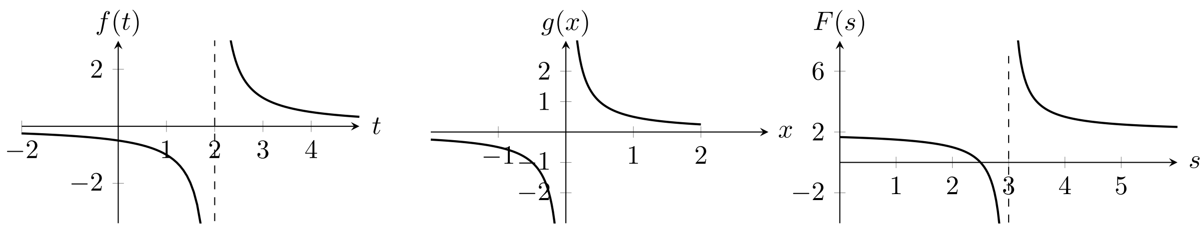
- Fait en séance.
- Fait en séance.
- $\mathrm{dom} G = \mathbb{R}$
- $\mathrm{dom} h =]-3, +\infty[$
- $\mathrm{dom} k =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$
- $\mathrm{dom} f = [1, +\infty[$

Solution 1.2 Fait en séance.

Solution 1.3 La fonction nulle.

Solution 1.4 Fait en séance.

Solution 1.5



Solution 1.6

a) Fait en séance.

b) Fait en séance.

c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2x} + 2}$ et $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

Solution 1.7 Fait en séance.

Solution 1.8

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = 6x - 8$

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = -4t^2 + 4t = 4t(1-t)$

c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 2x$

d) Fait en séance.

e) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G(z) = -\dfrac{21}{z^8}$

g) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = 2t + 2\sin t$

h) Fait en séance.

i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z) = \dfrac{4}{z} + 2z + \dfrac{2}{z^3}$

j) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) = 2e^x + \dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\cos x$

Solution 1.9

a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = 3x^2 - 2x + 2$

b) Fait en séance.

c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = 3t^2 - 7$

Solution 1.10 On a $g(x) = f(2x) = 4x^2 + \cos(2x)$. La dérivée de g est donnée par $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = 8x - 2\sin(2x)$ et la dérivée de f évaluée ensuite en $2x$ est $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(2x) = 4x - \sin(2x)$.

Solution 1.11

a) Fait en séance.

b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = e^x(\cos x + \sin x)$

c) Fait en séance.

d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t) = -5\sin(5t)$

e) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s) = \dfrac{2}{\cos^2(2s+3)}$

f) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}g(t) = \dfrac{5}{2}t\sqrt{t}$

g) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(x) = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^2(x^2 + x + 1)^2}$

h) Fait en séance.

i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h(t) = \dfrac{1}{t\cos^2(\ln t)}$

j) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = 8(x+1)^7$

k) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

l) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}g(z) = \dfrac{4}{z} - \dfrac{1}{2(z+2)\sqrt{z+2}}$

Références

[1] V. Blondel, *Mathématiques - Analyse : Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2000.