# Cours préparatoires au master en sciences informatiques

## Fondements

Stéphanie Guérit
École polytechnique de Louvain (UCLouvain)

4 septembre 2023



**Les mathématiques sont un langage**

Et nous allons en voir un petit aperçu...

# Construction du glossaire

Les symboles et notations font partie de ce langage.

| Symbole | Signification |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Ensemble des naturels |
| $\mathbb{N}^*$ | Ensemble des naturels strictement positifs |
| $\mathbb{Z}$ | Ensemble des entiers |
| $\mathbb{R}$ | Ensemble des réels |
| $\mathbb{R}_+$ | Ensemble des réels positifs |
| $\mathbb{R}_+^*$ | Ensemble des réels strictement positifs |
| $\emptyset$ | Ensemble vide |
| $\setminus$ | Différence (de deux ensembles) |
| $\cup$ | Union (de deux ensembles) |
| | ... |



Ajout de symboles et notations dans le glossaire...

Exercices 1.2 et 1.4

## Un peu de logique et de preuves

**Que pensez-vous de l'énoncé ci-dessous ?**

Dieu est Dieu

Ce qui est existe

Donc Dieu existe.

Il s'agit d'un **sophisme**.



## Être ou ne pas être : les quatre significations

Exemple tiré de *Pensée magique, pensée logique*[1] :

| | | |
|---|---|---|
| Isabelle est. | Existence | $\exists$ |
| Isabelle est la fille de Brigitte. | Équivalence | $=$ |
| Isabelle est une femme. | Appartenance | $\in$ |
| La femme est un être humain. | Inclusion | $\subset$ |

Un verbe, quatre significations... les mathématiques permettent de lever cette ambiguïté de la langue.

[1] L. de Brabandere, *Pensée magique, pensée logique*, Éd. Le Pommier, 2016.

# Les quantificateurs : $\exists$ et $\forall$

| | | |
|---|---|---|
| Quantificateur existentiel : | $\exists$ | *il existe* |
| Quantificateur **universel** : | $\forall$ | *pour tout, quel que soit* |

Leur ordre a de l'importance.

Exemple : "tout a une cause" et "tout a la même cause"



# "Tout le monde aime quelqu'un"

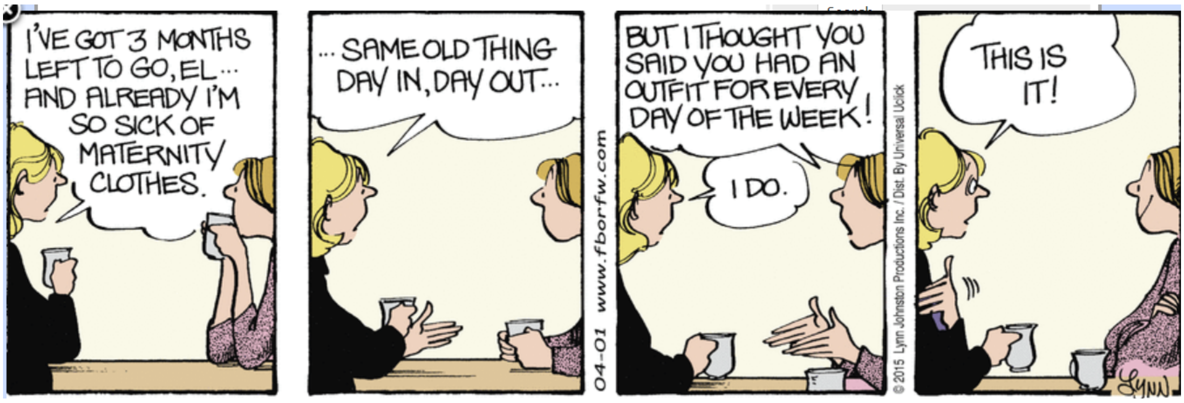
Plusieurs interprétations possibles...




Les quantificateurs permettent de lever les ambiguïtés.

# “Tout le monde aime quelqu’un”

Plusieurs interprétations possibles...




Exercices 1.5 (“écriture”) et 1.6 (“lecture”)



Pause (10 min)

## Sommaire





**Qu’est-ce qu’une preuve ?**

Chacun propose une définition.

https://www.wooclap.com/PJSHCA

## Concept de preuve

### Définition (Preuve)

*Une preuve est un moyen d'établir qu'une affirmation est vraie.*

En mathématiques, on cherche à démontrer

- des propositions ("thèse")
- des implications ($\Rightarrow$)
- des équivalences ($\Leftrightarrow$)

sur base d'hypothèses.

*Écrire une preuve est avant tout un exercice de rédaction et non pas de calcul. Il est important de structurer la pensée, d'introduire et de conclure la démonstration, de ne pas utiliser d'arguments d'intimidation.*



## Techniques de preuve

**Preuve directe**

Exemple : Si $0 \leq x \leq 2$, alors $-x^3 + 4x + 1 > 0$.

**Preuve par contraposition (implication)**

On démontre "si $A$ est vrai alors $B$ est vrai" via la contraposée (qui est équivalente) : "si $B$ est faux alors $A$ est faux."

### Preuve par l'absurde

On démontre qu'une proposition est vraie en supposant qu'elle est fausse et en démontrant que cela mène à une contradiction, un résultat impossible.

Exemple : "$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel."

### Preuve par récurrence/induction

Exemple : "il existe une infinité de nombres premiers."



### Preuve par récurrence

En groupe, proposez une preuve par récurrence
pour la proposition de l'exercice 1.8(b).